

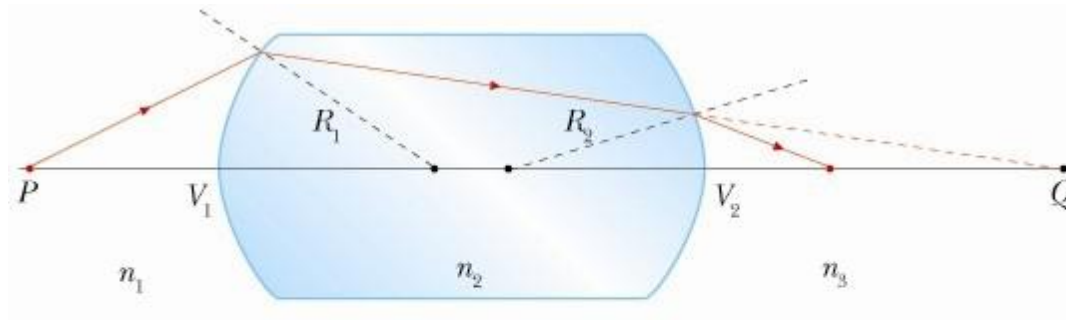
Sommario

Definizione di lente	2
Tipi di lenti	2
Punti e piani principali.....	5
Punti e piani nodali	10
Terminologia	12
Focale, distanze coniugate ed ingrandimento	19
Immagine generata da lenti sferiche	24
Formule parassiali per lenti	28
Apertura relativa ed apertura numerica	34

Definizione di lente

Si definisce **sistema ottico centrato** un sistema costituito da due o più superfici curve, aventi tutte i centri su una stessa retta, le quali separano mezzi trasparenti di diverso indice di rifrazione (diottri) o costituiscono superfici riflettenti (specchi).

Il più semplice sistema ottico centrato è la lente, cioè un sistema ottico costituito dalla successione di due diottri semplici, in cui il primo ed il terzo indice di rifrazione sono uguali.



Normalmente, la lente è realizzata in vetro o materiali plastici. Esistono anche dispositivi analoghi, che operano su altre bande dello spettro elettromagnetico o altre forme di radiazione, comunque chiamati lenti.

Tipi di lenti

Il tipo più comune è rappresentato dalle **lenti sferiche**, caratterizzate dall'aver le due superfici opposte costituite idealmente da porzioni di sfera di raggi r_1 ed r_2 . Ciascuno di questi parametri è il raggio di curvatura della corrispondente superficie.

Il segno del raggio r determina la forma della superficie corrispondente:

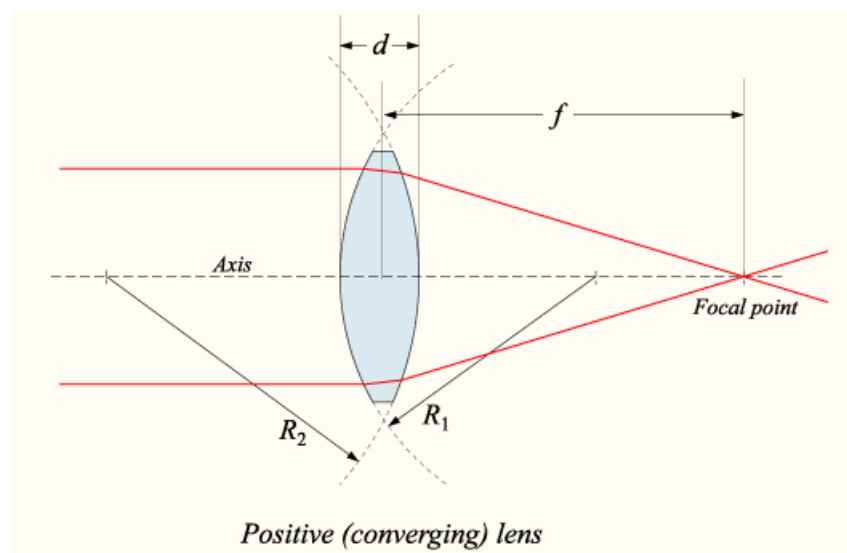
- **$r > 0$ → superficie sferica convessa,**
- **$r < 0$ → superficie sferica concava,**
- **$r = \infty$ → superficie a curvatura nulla (superficie piana).**

La linea passante per i centri delle sfere ideali e generalmente passante anche per il centro geometrico della lente è detto **asse ottico**.

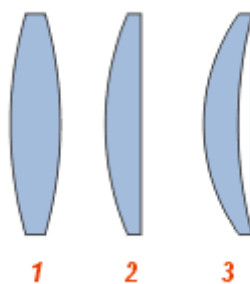
Le lenti sono classificate secondo la curvatura delle due superfici e quindi la loro capacità di fare convergere o divergere i raggi luminosi rispetto all'asse ottico.

Lenti convergenti

Sono in grado di fare **convergere (focalizzare)** un fascio di luce incidente collimato in un unico punto sull'asse ottico.



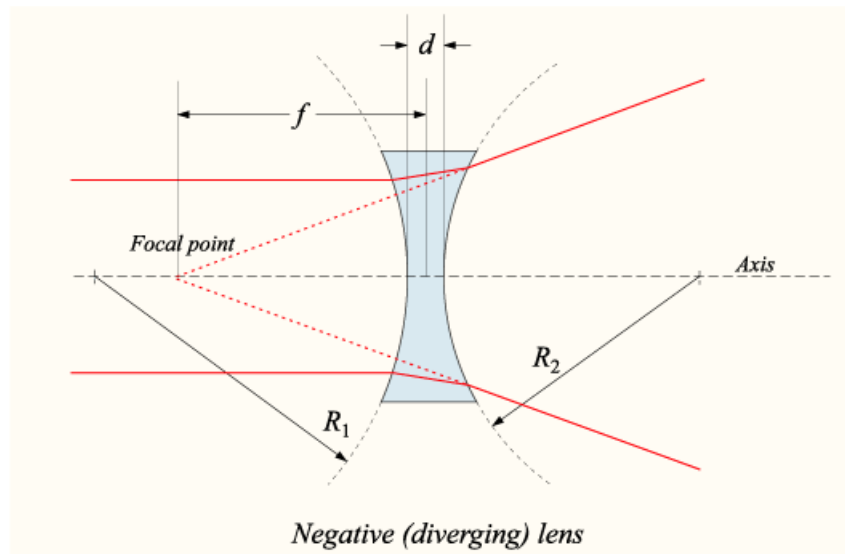
Note anche come **lenti positive**, sono più spesse al centro che non al bordo:



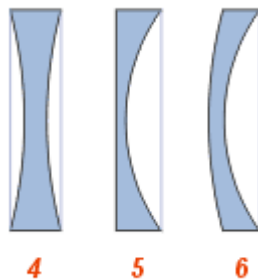
- 1) **biconvessa (o convessa) simmetrica o asimmetrica** se entrambe sono convesse,
- 2) **piano-convessa** se una è piatta e l'altra convessa,
- 3) **convesso-concava (o menisco convergente)** se una è convessa e l'altra concava.

Lenti divergenti

Sono in grado di fare divergere un fascio di luce incidente collimato. I raggi uscenti dalla lente sembrano provenire da un unico punto dell'asse ottico antecedente la lente.



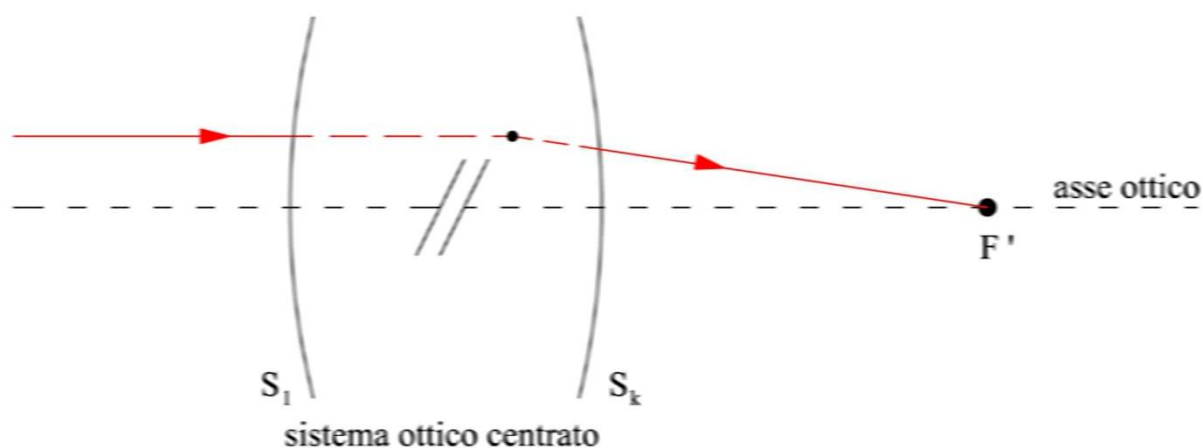
Note anche come **lenti negative**, sono più spesse al bordo che non al centro:



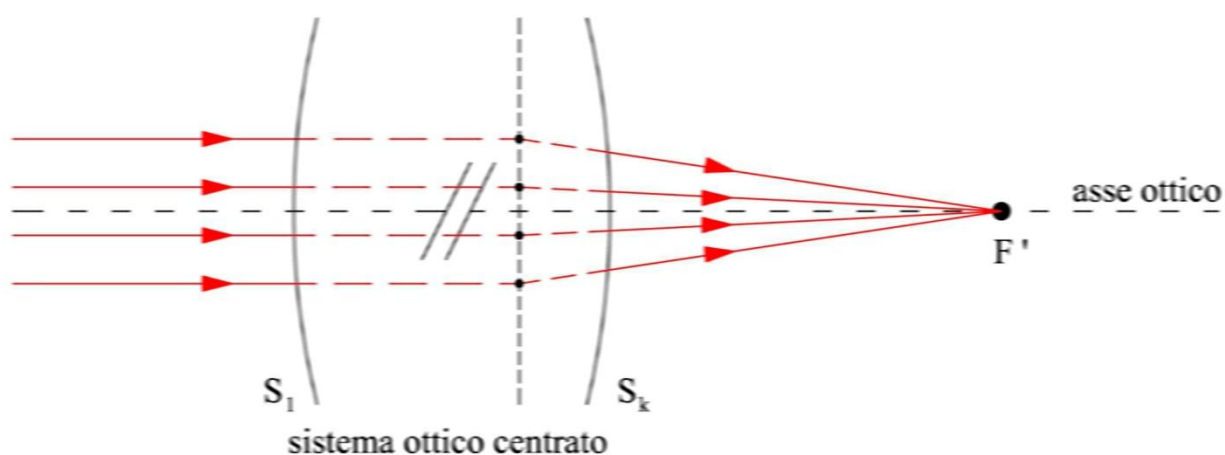
- 4) **biconcava (o concava) simmetrica o asimmetrica** se entrambe sono concave,
- 5) **piano-concava** se una è piatta l'altra è concava,
- 6) **concavo-convessa (o menisco divergente)** se una è concava e l'altra convessa.

Punti e piani principali

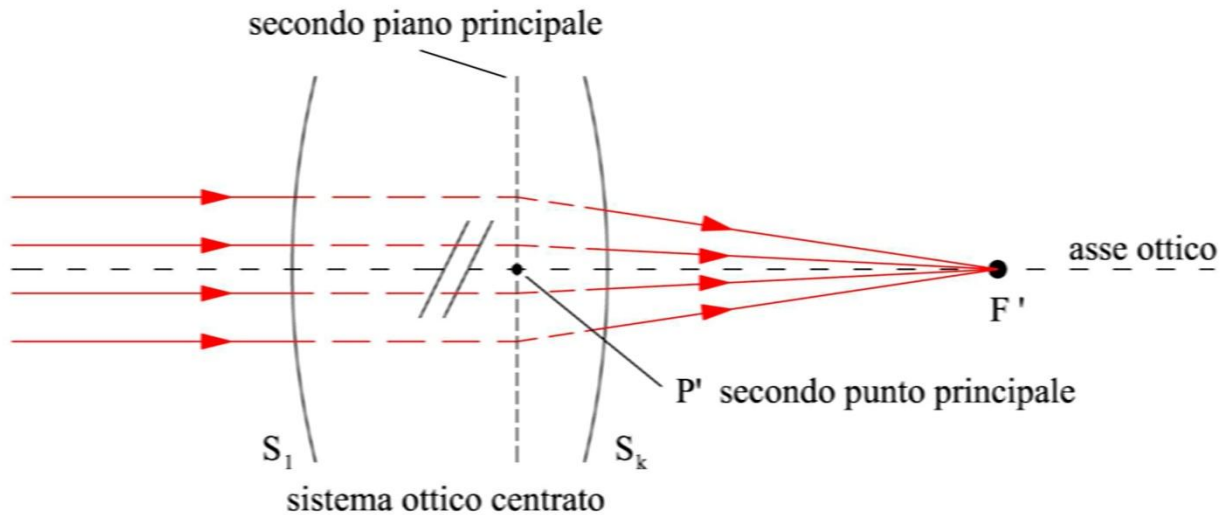
Si consideri un sistema ottico centrato non afocale ed un raggio parallelo all'asse ottico che incide su S_1 . Si consideri poi il punto di intersezione tra questo raggio incidente, o il suo prolungamento, ed il corrispondente raggio, o il suo prolungamento, che emergendo da S_k va ad intersecare l'asse nel secondo punto focale F' .



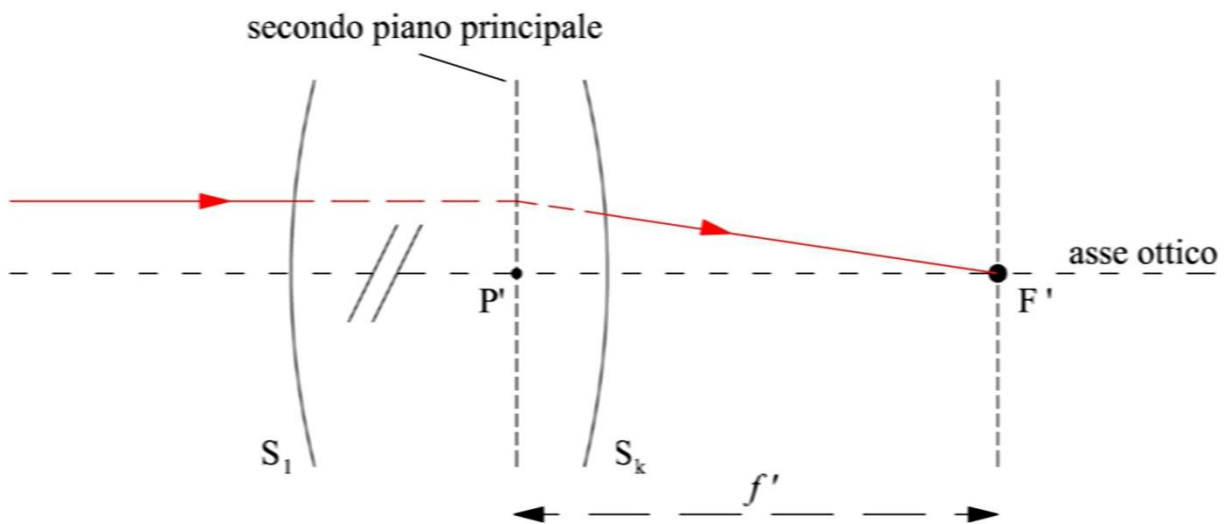
Utilizzando le formule per il tracciamento di un raggio meridiano parassiale è facile verificare che, al variare della distanza dall'asse ottico del raggio incidente, il punto di intersezione descritto in precedenza appartiene sempre ad un piano perpendicolare all'asse ottico.



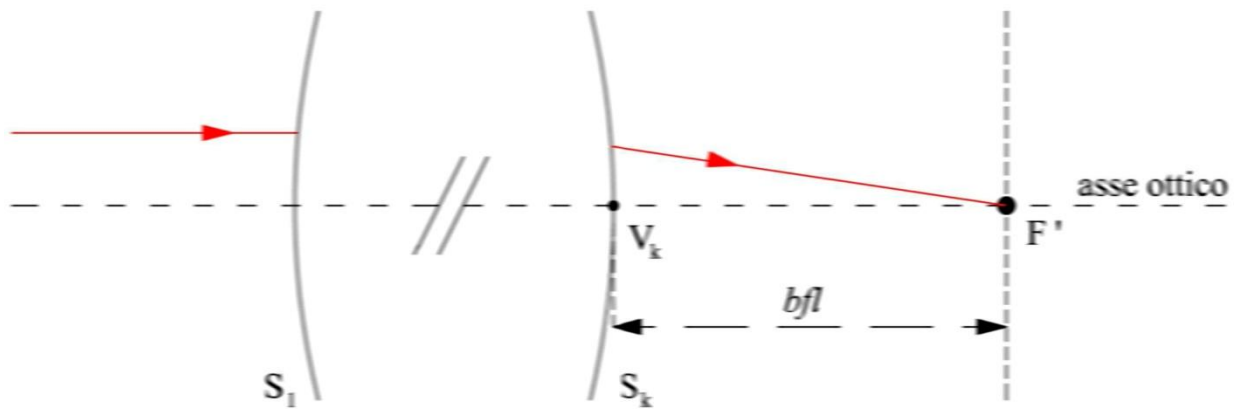
Questo piano è detto **secondo piano principale** del sistema ottico centrato alla lunghezza d'onda considerata. Inoltre, il punto in cui il secondo piano principale interseca l'asse è detto **secondo punto principale** ed è indicato con P' .



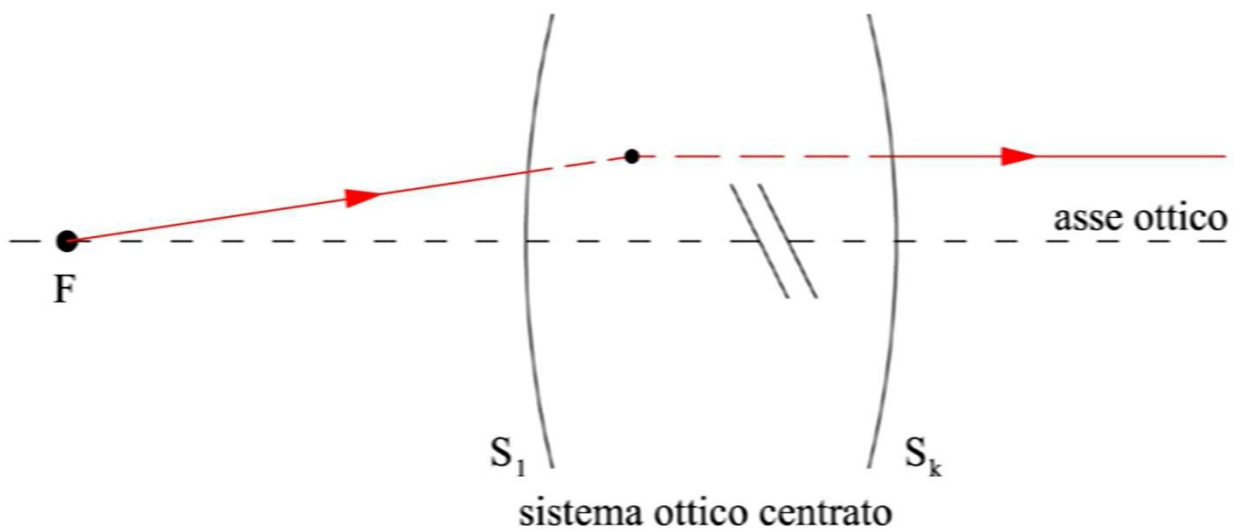
La distanza $P'F'$, positiva (negativa) se F' è situato a destra (sinistra) di P' , è detta **lunghezza focale effettiva posteriore** o, più semplicemente, **focale** del sistema ottico centrato alla lunghezza d'onda considerata, ed è indicata con il simbolo f' .



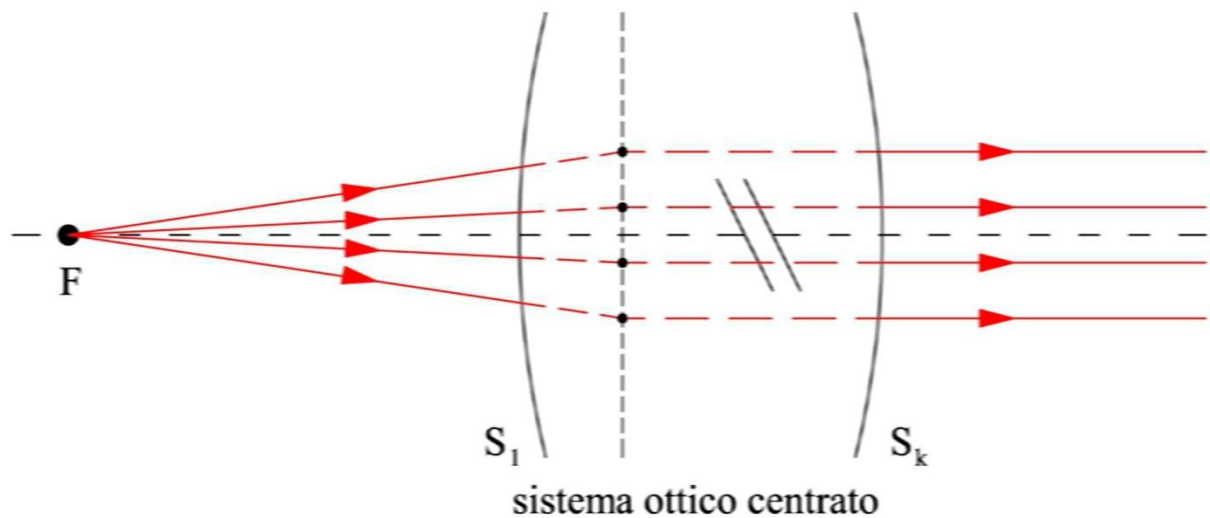
Indicando con V_k il vertice dell'ultima superficie S_k del sistema ottico, la distanza V_kF' , positiva (negativa) se F' è situato a destra (sinistra) di V_k , è detta **lunghezza focale posteriore** del sistema ottico centrato alla lunghezza d'onda considerata ed è indicata con il simbolo **bfl (back focal length)**.



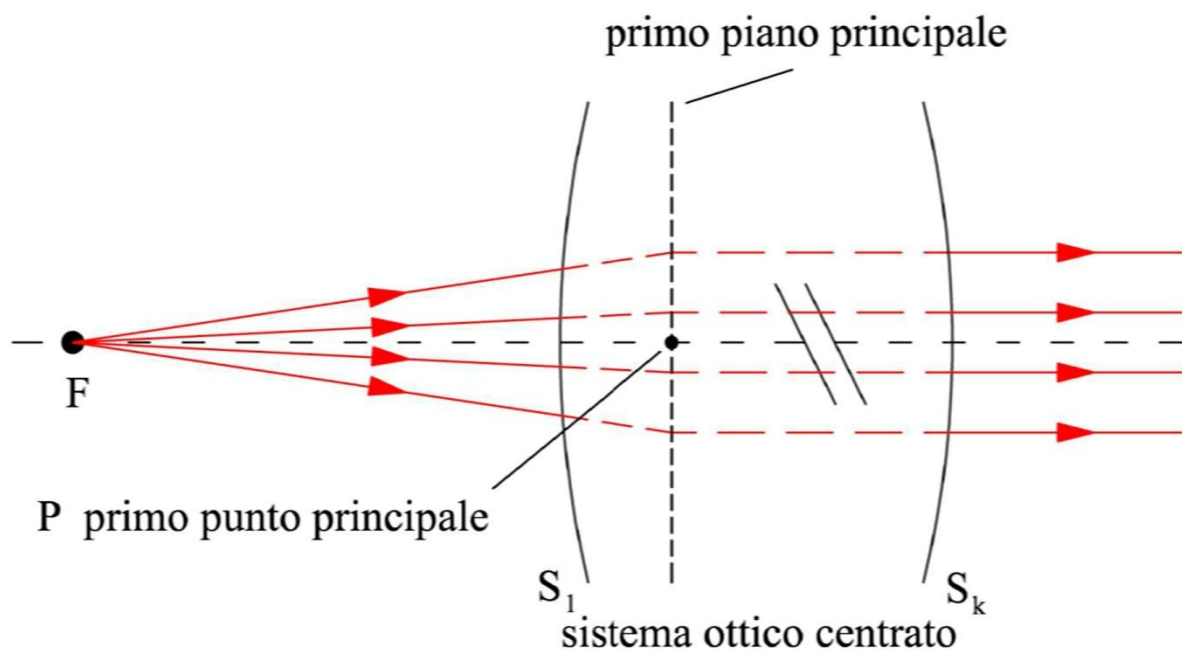
Si consideri ora un sistema ottico centrato non afocale ed un raggio, proveniente dal suo primo punto focale F , che incide su S_1 . Si consideri poi il punto di intersezione tra questo raggio incidente, o il suo prolungamento, ed il corrispondente raggio, o il suo prolungamento, che emerge da S_k parallelamente all'asse ottico.



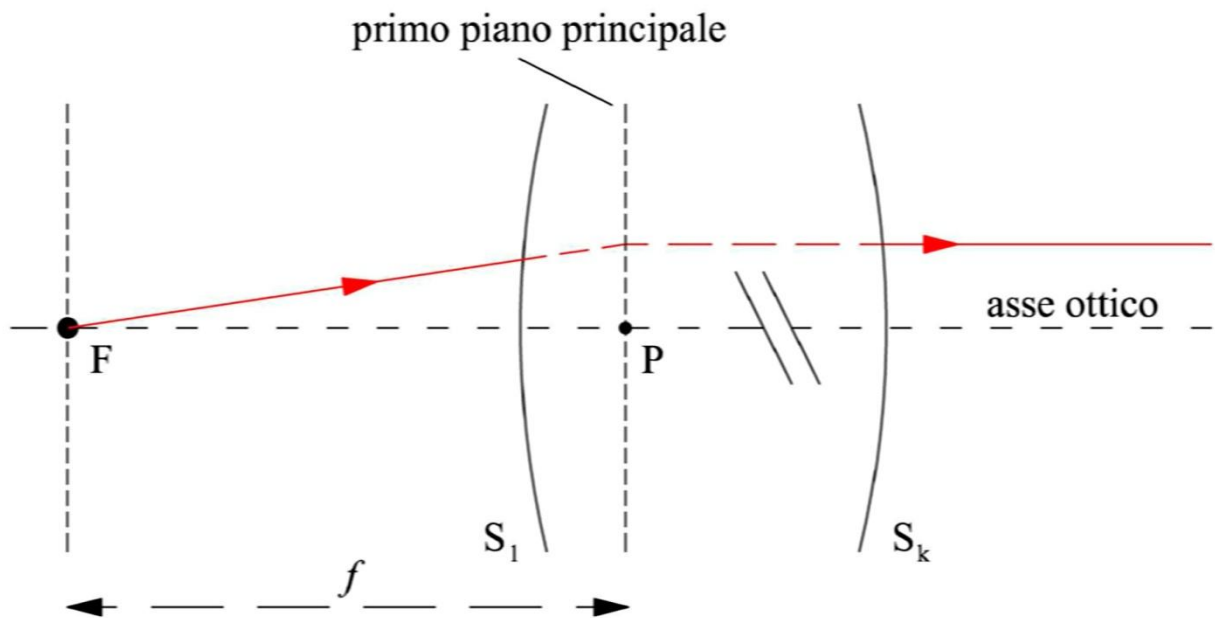
Utilizzando le formule per il tracciamento di un raggio meridiano parassiale è facile verificare che, al variare dell'altezza su S_1 del raggio incidente, il punto di intersezione descritto in precedenza appartiene sempre ad un piano perpendicolare all'asse ottico.



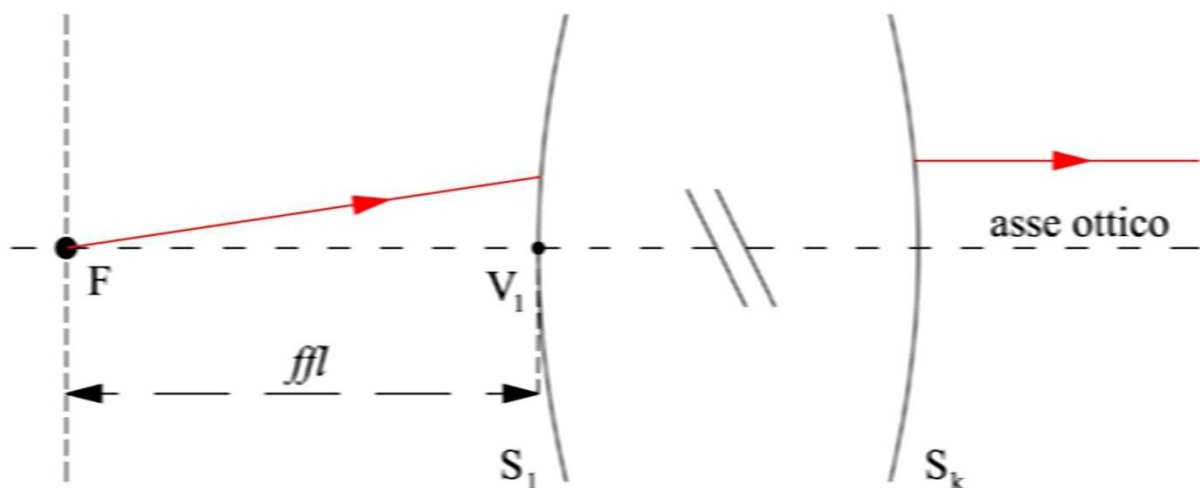
Questo piano è detto **primo piano principale** del sistema ottico centrato alla lunghezza d'onda considerata. Inoltre, il punto in cui il primo piano principale interseca l'asse è detto **primo punto principale** ed è indicato con P.



La distanza PF , positiva (negativa) se F è situato a destra (sinistra) di P , è detta **lunghezza focale effettiva anteriore** del sistema ottico centrato alla lunghezza d'onda considerata, ed è indicata con il simbolo f .

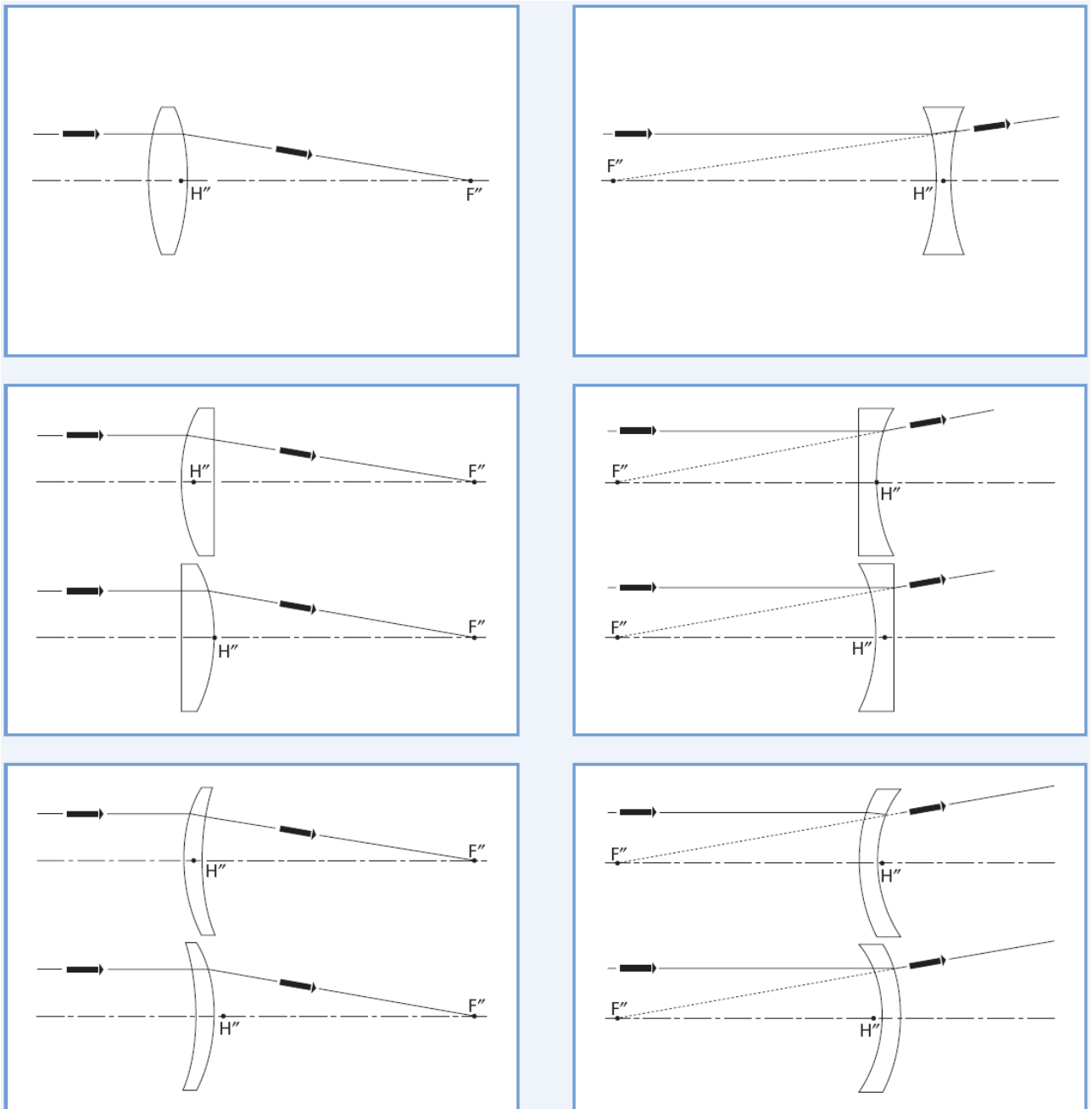


Indicando con V_1 il vertice della prima superficie S_1 del sistema ottico, la distanza V_1F , positiva (negativa) se F è situato a destra (sinistra) di V_1 , è detta **lunghezza focale anteriore** del sistema ottico centrato alla lunghezza d'onda considerata ed è indicata con il simbolo ***ffl* (front focal length)**.



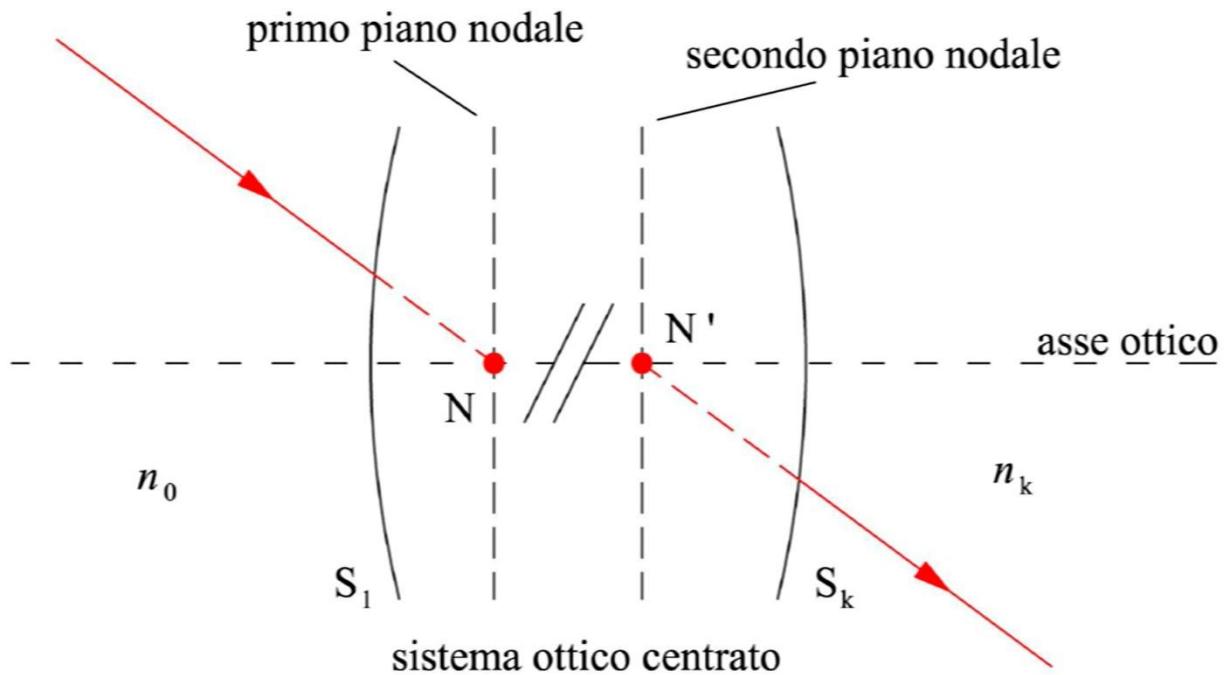
La figura sottostante indica approssimativamente dove cadono i punti principali rispetto alle superfici di rifrazione per varie forme standard della lente. Le posizioni esatte dipendono dall'indice di rifrazione del vetro e dai raggi della lente e possono essere calcolate mediante specifiche formule. Nei menischi esasperati (raggi corti o curvature accentuate), è possibile che entrambi i punti principali cadano all'esterno della lente. Nelle lenti simmetriche, i punti principali dividono la porzione di asse ottico tra i vertici in tre segmenti all'incirca uguali. Nelle lenti con una superficie piana, uno

dei punti principali è posto nel vertice della superficie curva e l'altro dista dal vertice della superficie piana circa un terzo dello spessore della lente al centro.



Punti e piani nodali

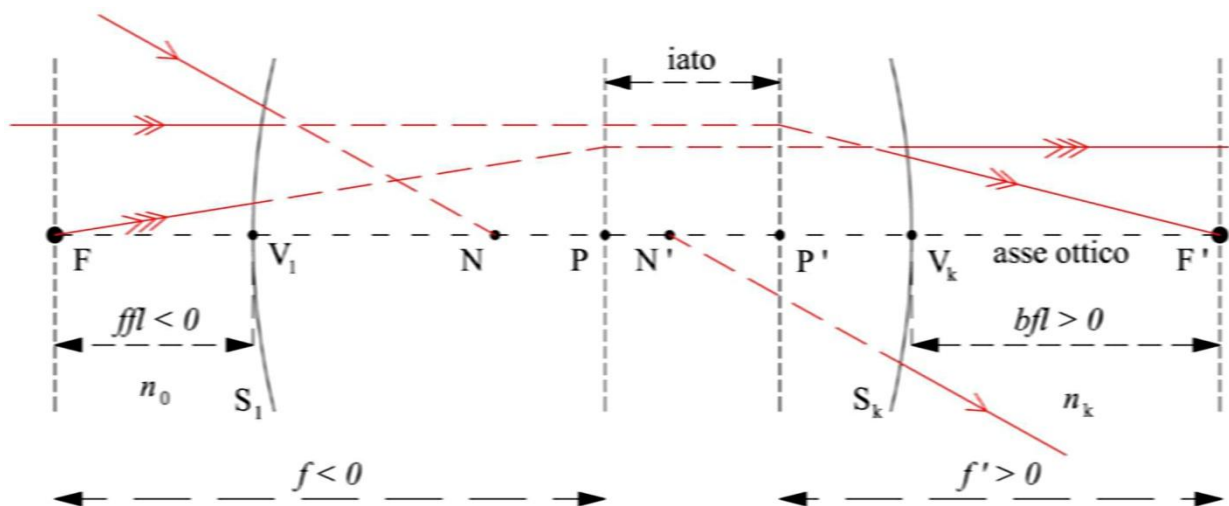
Il **primo punto nodale N** ed il **secondo punto nodale N'** di un sistema ottico centrato non afocale per una data lunghezza d'onda sono due punti situati sull'asse ottico che godono della proprietà illustrata in figura.



Quando un raggio, cui è associata la lunghezza d'onda considerata, incide su S₁ passando (esso o il suo prolungamento) per N, il corrispondente raggio che emerge da S_k passa (esso o il suo prolungamento) per N' ed è **parallelo** al raggio incidente su S₁.

I piani perpendicolari all'asse ottico e passanti per N ed N' sono detti rispettivamente **primo piano nodale** e **secondo piano nodale**.

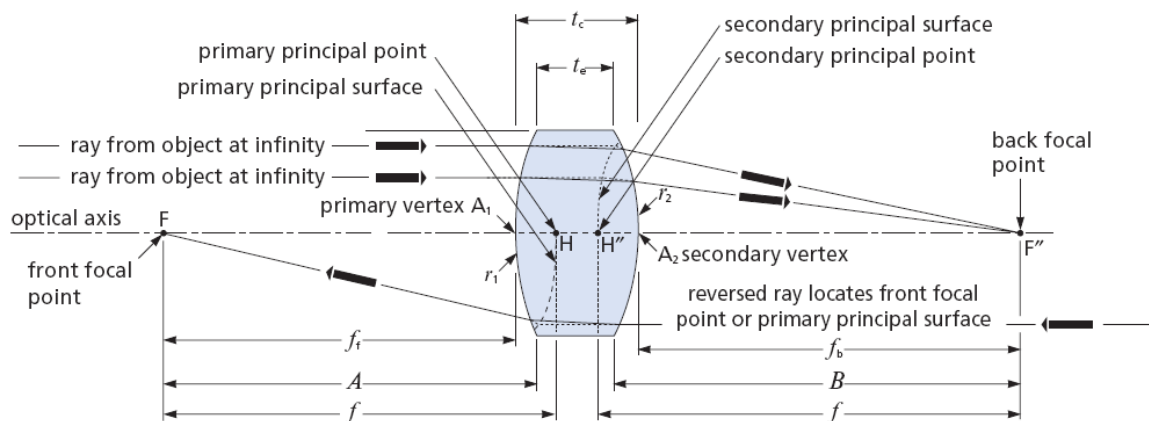
Nella figura che segue vengono sintetizzate tutte le caratteristiche parassiali di un sistema ottico centrato non afocale, che sono state definite separatamente in precedenza.



Come è indicato nella figura, la distanza tra i due piani principali è detta **iato (hiatus)**. Si osservi che per motivi di leggibilità della figura i due piani nodali non sono stati riportati nel disegno.

I due punti principali insieme ai due punti focali ed ai due punti nodali costituiscono i **sei punti cardinali** di un sistema ottico centrato non afocale in condizioni parassiali. L'aggettivo "cardinali" sta ad evidenziare l'importanza che hanno questi punti per un sistema ottico centrato. Infatti, la conoscenza della posizione di questi punti rispetto alle superfici del sistema ottico permette di determinare facilmente tutte le sue proprietà ottiche in condizioni parassiali.

Terminologia



A = front focus to front edge distance	f = effective focal length; may be positive (as shown) or negative	t_e = edge thickness	r_1 = radius of curvature of first surface (positive if center of curvature is to right)
B = rear edge to rear focus distance	f_f = front focal length	t_c = center thickness	r_2 = radius of curvature of second surface (negative if center of curvature is to left)
	f_b = back focal length		

Lunghezza focale (f)

Due distinti termini descrivono le lunghezze focali di una lente o un sistema di lenti.

La **lunghezza focale equivalente (Effective Focal Length, EFL) f** determina l'ingrandimento e quindi le dimensioni dell'immagine. Il termine f appare frequentemente nelle formule e nelle tabelle

delle delle lenti standard. Sfortunatamente, poiché f è misurata rispetto ai punti principali situati normalmente all'interno della lente, il suo significato non è immediatamente evidente in caso di esame visivo della lente.

Il secondo tipo di lunghezza focale mette direttamente in relazione le posizioni dei piani focali ed i punti di riferimento sulle superfici delle lenti (ovvero i **vertici**), immediatamente riconoscibili. La lente è quindi caratterizzata da una **lunghezza focale anteriore (Front Focal Length, FFL) f_f** e da una **lunghezza focale posteriore (Back Focal Length, BFL) f_b** . Questo secondo tipo di lunghezza focale non è facilmente correlabile con le dimensioni dell'immagine, ma il suo impiego diventa particolarmente utile quando si nutrono dubbi sul corretto posizionamento della lente o sui giochi meccanici.

Ad eccezione dei raggi con percorso inverso, la convenzione adottata in tutte le figure è che la luce si muova da sinistra verso destra.

Fuoco (F, F'')

I raggi che attraversano entrambi i fuochi convergendo o divergendo presentano, sul lato opposto della lente, un andamento parallelo all'asse ottico. Questo comportamento permette di individuare ambedue i fuochi.

Superficie principale primaria

Si immagini che i raggi provenienti dal fuoco anteriore F , e quindi paralleli all'asse ottico quando emergono dal lato opposto della lente, siano rifratti una sola volta da una superficie immaginaria invece che due volte (una volta per ciascuna superficie della lente) come avviene realmente. Questa unica superficie immaginaria di rifrazione è denominata **superficie principale**.

Per individuarla, si consideri il percorso di un singolo raggio dal fuoco anteriore alla prima superficie della

lente, dalla prima alla seconda superficie e dalla seconda superficie nuovamente in aria, sul lato opposto e parallelamente all'asse ottico. La lente scompone il percorso del raggio in tre segmenti, il primo ed il terzo esterni (nell'aria) ed il secondo interno (nel vetro). I prolungamenti dei due segmenti esterni si intersecano in un punto prossimo o, più comunemente, interno alla lente. La superficie principale è il luogo dei punti di intersezione dei prolungamenti dei segmenti esterni di tutti i raggi che intercettano la lente. La superficie principale di un sistema ottico perfettamente corretto è una sfera con centro nel fuoco.

Nei dintorni dell'asse ottico, la superficie principale è praticamente piana e, per questo motivo, è talvolta denominata ***piano principale***.

Superficie principale secondaria

È analoga alla superficie principale primaria, ma è riferita ad un fascio collimato incidente da sinistra e convergente nel fuoco posteriore F'' a destra. Per i raggi nella parte di fascio prossima all'asse ottico, si può ritenere che siano soggetti ad una singola rifrazione sulla superficie principale secondaria invece che alle due rifrazioni reali operate in sequenza dalle due superfici della lente.

Punto principale primario (H)

Noto anche come ***primo punto nodale***, è il punto di ***intersezione tra superficie principale primaria ed asse ottico***.

Punto principale secondario (H'')

Noto anche come ***secondo punto nodale***, è il punto di ***intersezione tra superficie principale secondaria ed asse ottico***.

Distanze coniugate (s, s'')

Sono la ***distanza del soggetto s*** e la ***distanza dell'immagine s''***. Più precisamente, s è la

distanza dal soggetto ad H e s'' è la distanza da H'' all'immagine. Con **rapporto coniugato infinito** si intendono le situazioni in cui la lente focalizza un fascio luminoso collimato o collima il fascio di una sorgente puntiforme (cioè le situazioni in cui s o s'' sono infinite).

Vertice primario (A_1)

È l'**intersezione della prima superficie della lente con l'asse ottico**.

Vertice secondario (A_2)

È l'**intersezione della seconda superficie della lente con l'asse ottico**.

Lunghezza focale equivalente (f)

Supponendo che la lente sia immersa in aria o nel vuoto (indice di rifrazione pari a 1,0), è la **distanza dal fuoco anteriore (F) al punto principale primario (H)** e la **distanza dal punto principale secondario (H'') al fuoco posteriore (F'')**. La lettera **f** indica la **lunghezza focale parassiale** per la lunghezza d'onda di progetto.

Lunghezza focale anteriore (f_f)

È la **distanza dal fuoco anteriore (F) al vertice primario (A_1)**.

Lunghezza focale posteriore (f_b)

È la **distanza dal vertice secondario (A_2) al fuoco posteriore (F'')**.

Distanze vertice-fuoco (A, B)

Sono rispettivamente la **distanza dal fuoco anteriore al vertice primario (A)** e la **distanza dal vertice secondario al fuoco posteriore (B)** della lente. Entrambe le distanze sono considerate sempre positive.

Immagine reale

Si ottiene per **convergenza dei raggi luminosi**. Se si colloca uno schermo nel punto di fuoco, è possibile osservare l'immagine sulla sua superficie.

Immagine virtuale

Si ottiene in **assenza di convergenza dei raggi luminosi**. È possibile osservarla solo guardando attraverso il sistema ottico, come nel caso di una lente di ingrandimento.

Apertura relativa (f/N)

È definita dalla lunghezza focale della lente divisa per l'apertura libera o dalla lunghezza focale equivalente del sistema di lenti divisa per l'apertura libera.

$$N = \frac{f}{CA}$$

Il valore N di un raggio luminoso qualsiasi è la sua distanza coniugata divisa per l'altezza di intercettazione della superficie principale.

Apertura numerica (NA)

È definita dal seno dell'angolo θ , che il **raggio marginale** (il raggio che intercetta la lente lungo il suo bordo circolare) forma con l'asse ottico, moltiplicato per l'indice di rifrazione del mezzo ottico. Contrassegnata dalla sigla **NA (Numerical Aperture)**, è data dalla seguente relazione:

$$NA = n \cdot \sin \theta$$

Ingrandimento (m)

Di solito, le lenti positive progettate per fungere da semplici elementi di ingrandimento sono classificate

con un singolo rapporto di ingrandimento, ad esempio 4x. In linea di principio, per generare un'immagine virtuale osservabile dall'occhio umano sarebbe possibile servirsi di una lente positiva con un numero infinito di rapporti di ingrandimento. Tuttavia, solo un limitato intervallo di rapporti di ingrandimento risulta confortevole per l'utilizzatore. Tipicamente, quando l'osservatore accomoda la distanza di messa a fuoco in modo che l'immagine del soggetto appaia fondamentalmente all'infinito (distanza di visione confortevole per la maggior parte degli individui), l'ingrandimento è dato dalla seguente relazione (con f espressa in millimetri):

$$m_{\infty} = \frac{254 \text{ mm}}{f}$$

Ad esempio, una lente positiva con lunghezza focale di 25,4 mm è un elemento ingranditore 10x.

Potenza (P)

Il **reciproco della lunghezza focale** definisce le diottrie, comunemente usate per caratterizzare le lenti da vista. La relazione è la seguente (con f espressa in millimetri):

$$P = \frac{1000}{f}$$

Quindi, al diminuire della lunghezza focale aumenta la potenza in diottrie della lente.

Profondità di campo

La profondità di campo si riferisce all'intervallo nello spazio del soggetto entro il quale il sistema ottico è in grado di generare un'immagine di **nitidezza accettabile**. Il criterio di nitidezza accettabile è

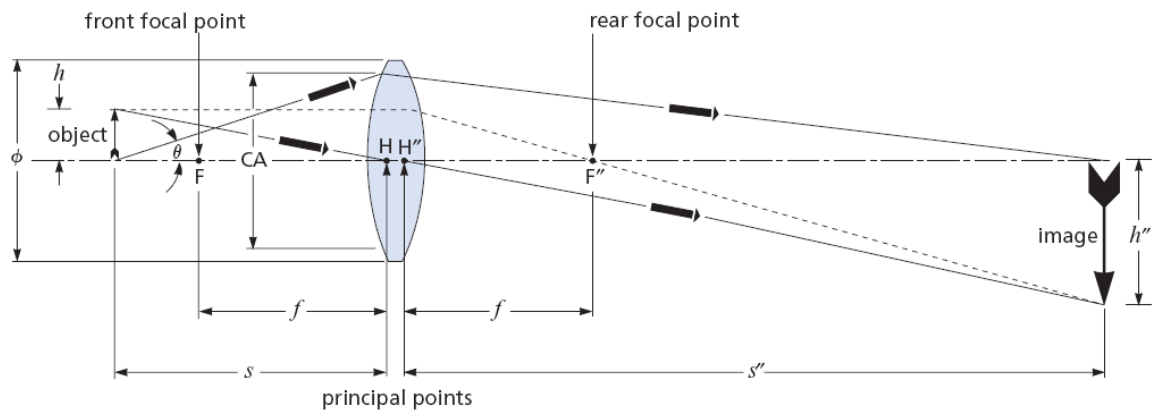
fissato arbitrariamente dall'utilizzatore. La profondità di campo aumenta con l'apertura relativa, cioè al chiudersi del diaframma.

Profondità di fuoco

La profondità di fuoco si riferisce all'intervallo nello spazio dell'immagine entro il quale il sistema ottico è in grado di generare un'immagine di **nitidezza accettabile**. In altri termini, è l'intervallo entro il quale si può spostare la superficie dove si forma l'immagine (schermo di proiezione, pellicola fotografica, CCD/CMOS) mantenendo una messa a fuoco accettabile. Anche il criterio di messa a fuoco accettabile è fissato arbitrariamente.

Focale, distanze coniugate ed ingrandimento

La validità delle formule parassiali delle lenti dipende dal rispetto delle seguenti convenzioni sui segni (se la lente è di tipo sottile, si consideri semplicemente la sua destra e la sua sinistra).



Note location of object and image relative to front and rear focal points.

ϕ = lens diameter

CA = clear aperture (typically 90% of ϕ)

f = effective focal length (EFL) which may be positive (as shown) or negative. f represents both FH and H'F', assuming lens is surrounded by medium of index 1.0

$m = s''/s = h''/h$ = magnification or conjugate ratio, said to be infinite if either s'' or s is infinite

$\theta = \arcsin (CA/2s)$

s = object distance, positive for object (whether real or virtual) to the left of principal point H

s'' = image distance (s and s'' are collectively called conjugate distances, with object and image in conjugate planes), positive for image (whether real or virtual) to the right of principal point H'

h = object height

h'' = image height

Convenzioni sui segni	
Lenti	
soggetto a sinistra di H (primo punto principale)	$s > 0$
soggetto a destra di H	$s < 0$
immagine a destra di H'' (secondo punto principale)	$s'' > 0$
immagine a sinistra di H''	$s'' < 0$
immagine capovolta	$m > 0$
immagine diritta	$m < 0$
Specchi	
specchio convesso (divergente)	$f > 0$
specchio concavo (convergente)	$f < 0$
soggetto a sinistra di H	$s > 0$
soggetto a destra di H	$s < 0$
immagine a destra di H''	$s'' < 0$
immagine a sinistra di H''	$s'' > 0$
immagine capovolta	$m > 0$
immagine diritta	$m < 0$

Tipicamente, il primo passo per la risoluzione di problemi ottici è di determinare la lunghezza focale in base ai vincoli del sistema, quali l'ingrandimento e le distanze coniugate (distanze del soggetto e dell'immagine dai rispettivi punti principali). La relazione tra lunghezza focale, posizione del soggetto e posizione dell'immagine è la seguente:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s''}$$

Per definizione, l'ingrandimento è il rapporto tra la dimensione dell'immagine e quella del soggetto:

$$m = \frac{s''}{s} = \frac{h''}{h}$$

Il sistema costituito da queste due equazioni permette di dedurre le seguenti relazioni:

$$f = m \frac{s + s''}{(m + 1)^2}$$

$$f = \frac{sm}{m + 1}$$

$$f = \frac{s + s''}{m + 2 + \frac{1}{m}}$$

$$s(m + 1) = s + s''$$

dove: $s + s'' =$ distanza approssimativa soggetto-immagine.

In una lente reale di spessore finito, la distanza dell'immagine, la distanza del soggetto e la lunghezza focale sono determinate rispetto ai punti principali e non rispetto al centro fisico della lente. Trascurando la distanza tra i due punti principali, nota come **iato**, $s + s''$ diventa la distanza soggetto-immagine. Questa **approssimazione per lenti sottili** può semplificare i calcoli nel caso di sistemi ottici semplici.

Esempio 1: soggetto esterno al fuoco

Un soggetto alto 1 mm è posto sull'asse ottico, 200 mm a sinistra del punto principale di sinistra di una lente con lunghezza focale di 50 mm. Determinare a quale distanza si forma l'immagine e l'ingrandimento.

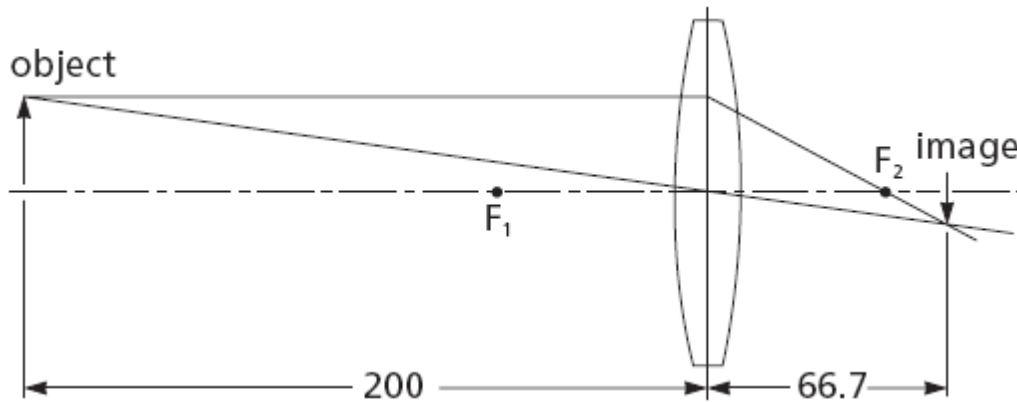
$$\frac{1}{s''} = \frac{1}{f} + \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s''} = \frac{1}{50} - \frac{1}{200}$$

$$s'' = 66,7 \text{ mm}$$

$$m = \frac{s''}{s} = \frac{66,7}{200} = 0,33$$

L'immagine reale è alta 0,33 mm ed è capovolta.



Esempio 2: soggetto interno al fuoco

Si riconsideri la situazione dell'Esempio 1 con il soggetto posto però 30 mm a sinistra del punto principale di sinistra della lente. Determinare a quale distanza si forma l'immagine e l'ingrandimento.

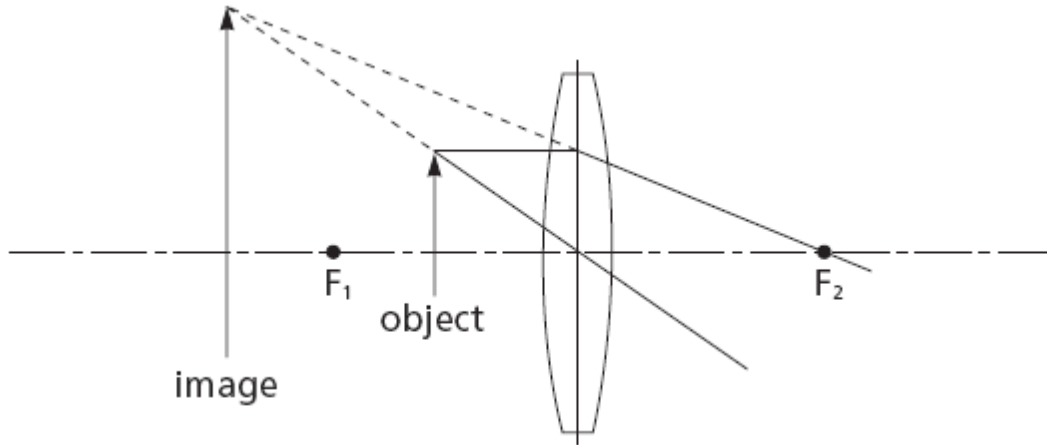
$$\frac{1}{s''} = \frac{1}{50} - \frac{1}{30}$$

$$s'' = -75 \text{ mm}$$

$$m = \frac{s''}{s} = \frac{-75}{30} = -2,50$$

L'immagine virtuale è alta 2,5 mm ed è dritta.

In questo caso, la lente è utilizzata come lente di ingrandimento e l'immagine è visibile solo all'indietro attraverso la lente stessa.



Esempio 3: soggetto nel fuoco

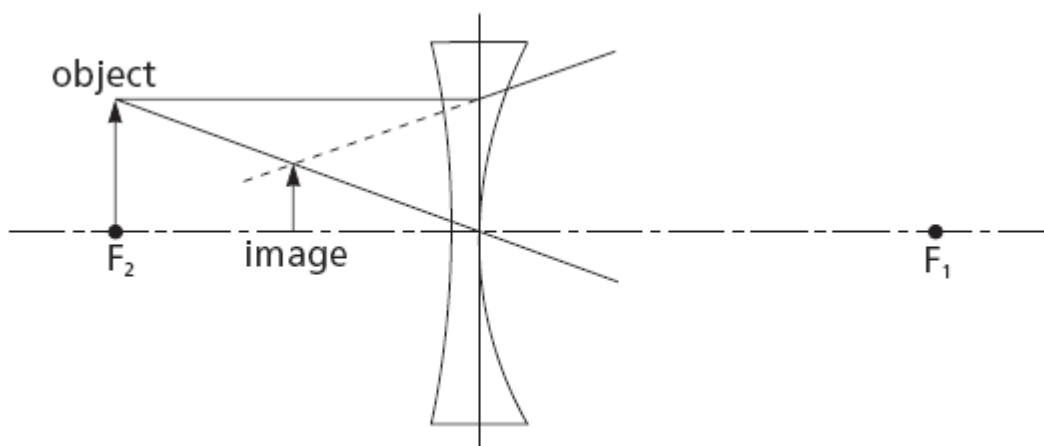
Un soggetto alto 1 mm è posto sull'asse ottico, 50 mm a sinistra del punto principale di sinistra di una lente con lunghezza focale di -50 mm. Determinare a quale distanza si forma l'immagine e l'ingrandimento.

$$\frac{1}{s''} = \frac{1}{-50} - \frac{1}{50}$$

$$s'' = -25 \text{ mm}$$

$$m = \frac{s''}{s} = \frac{-25}{50} = -0,50$$

L'immagine virtuale è alta 0,5 mm ed è dritta.



La posizione e l'ingrandimento dell'immagine sono anche facilmente determinabili per via grafica. L'approccio grafico si basa su due semplici dei sistemi ottici:

- il raggio che attraversa il sistema ottico arrivando parallelo al suo asse viene rifratto in modo da incrociare successivamente l'asse nel fuoco;
- il raggio che attraversa il sistema ottico incrociando il suo asse nel primo punto principale viene rifratto in modo da uscire dal secondo punto principale con direzione parallela a quella iniziale (ovvero, gli angoli di ingresso e di uscita rispetto all'asse ottico sono uguali).

Questo è il metodo utilizzato negli schemi dei tre precedenti esempi.

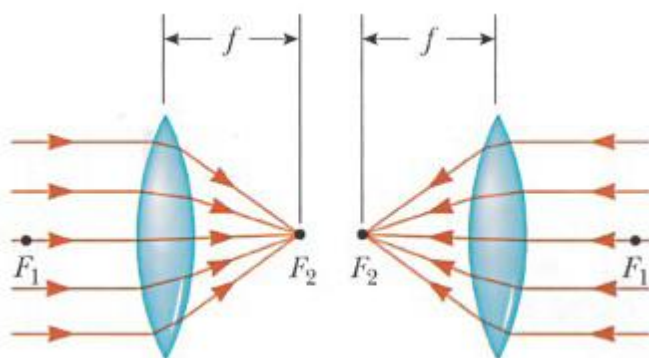
Qualora sia possibile utilizzare l'approssimazione per lenti sottili, la seconda proprietà porta ad affermare che il raggio passante per il centro del sistema ottico non subisce alcuna deviazione.

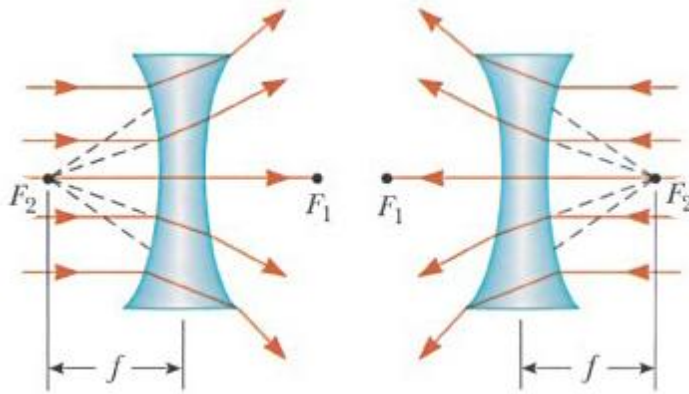
Immagine generata da lenti sferiche

Se il soggetto non è puntiforme, ma ha una certa estensione spaziale, occorre considerare ogni suo punto costituente come se fosse una sorgente separata; di conseguenza, la sua immagine sarà data dalla ricostruzione punto per punto.

Per la ricostruzione del soggetto, è sufficiente tracciare il percorso di due raggi dipartenti da ognuno dei punti sorgente: il punto di convergenza delle loro direzioni costituirà l'immagine. Nel caso delle lenti sottili, i percorsi più facilmente utilizzabili sono essenzialmente tre:

- raggio passante per il centro della lente, praticamente non rifratto e quindi non deviato
- raggio parallelo all'asse ottico, rifratto con direzione passante per il fuoco,

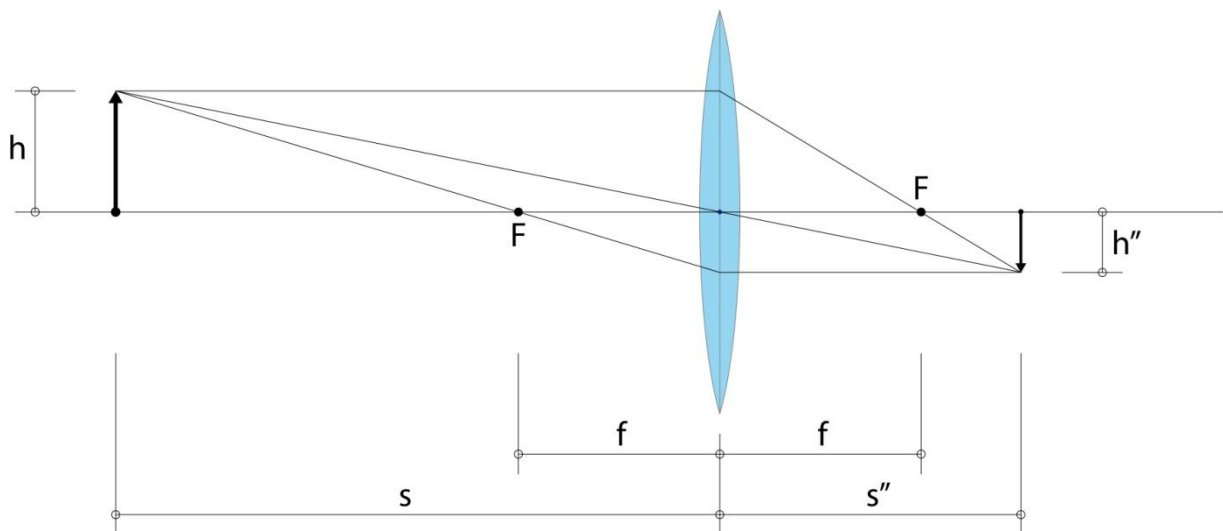




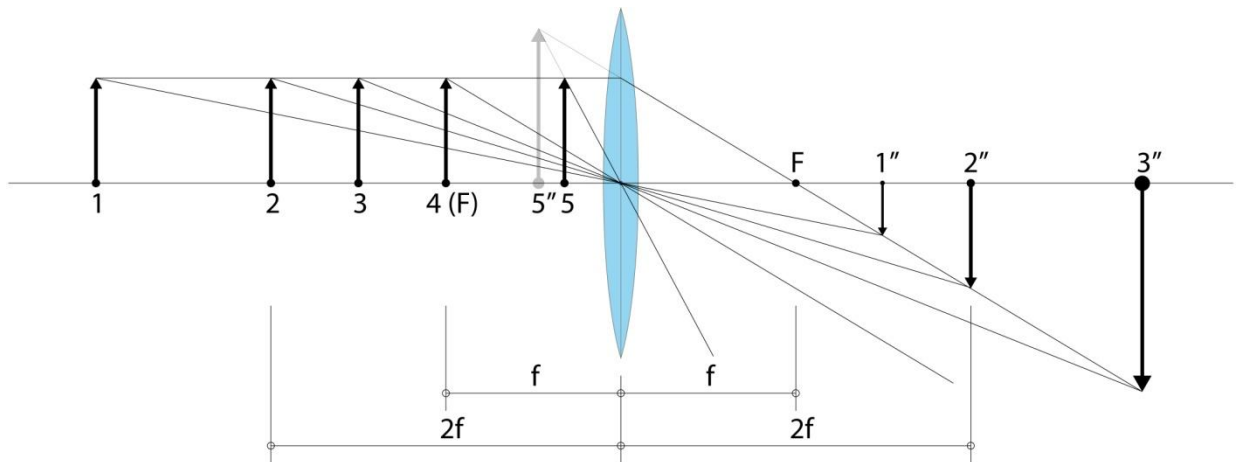
- raggio con direzione passante per il fuoco, rifratto in direzione parallela all'asse ottico per il **principio di reversibilità del percorso ottico**.

**Lente convessa
(convergente)**

La ricostruzione dell'immagine del soggetto è la seguente:



La distanza, la dimensione e la tipologia dell'immagine dipendono dalla posizione (distanza) del soggetto rispetto al centro della lente. A questo proposito, si consideri il seguente schema ottico:



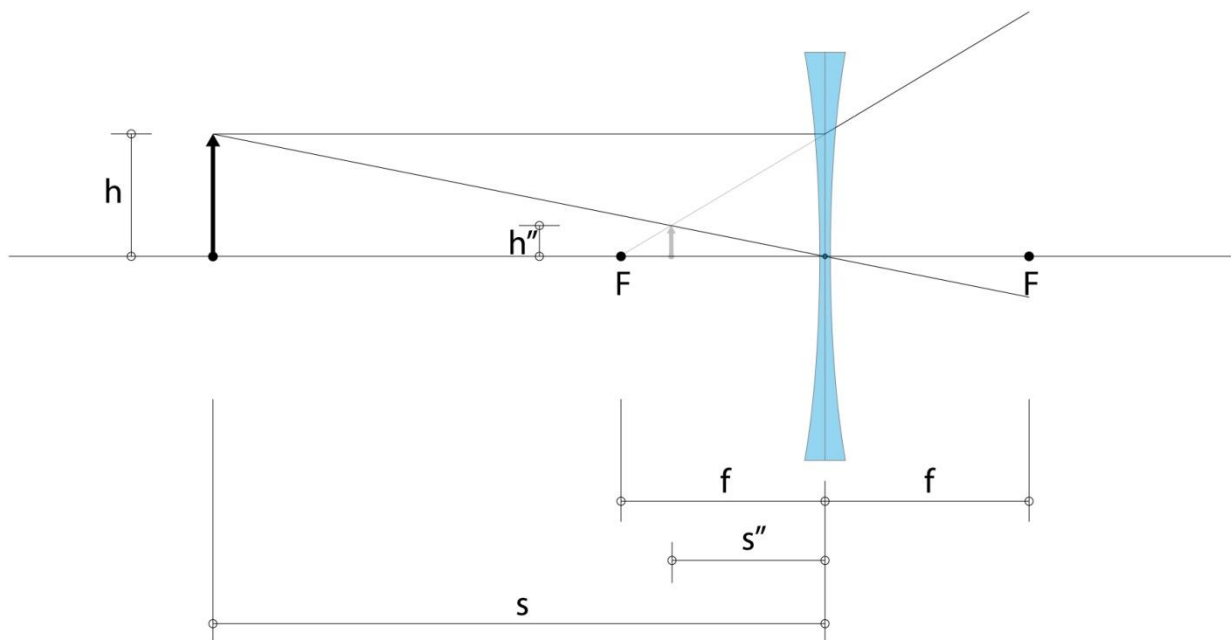
Si riscontrano cinque situazioni tipiche:

- 1) il soggetto è posto ad una distanza superiore al doppio della lunghezza focale, con l'immagine (1'') che si forma ad una distanza compresa tra la lunghezza focale ed il suo doppio ed è reale, capovolta e rimpicciolita;
- 2) il soggetto è posto ad una distanza pari al doppio della lunghezza focale, con l'immagine (2'') che si forma a sua volta ad una distanza pari al doppio della lunghezza focale ed è reale, capovolta e di uguali dimensioni;
- 3) il soggetto è posto ad una distanza compresa tra la lunghezza focale ed il suo doppio, con l'immagine (3'') che si forma ad una distanza superiore al doppio della lunghezza focale ed è reale, capovolta ed ingrandita;
- 4) il soggetto è posto ad una distanza pari alla lunghezza focale, con l'immagine che non può formarsi poiché i raggi sono rifratti tra loro paralleli;
- 5) il soggetto è posto ad una distanza inferiore alla lunghezza focale, con l'immagine (5'') che si forma dallo stesso lato ed è virtuale, diritta ed ingrandita.

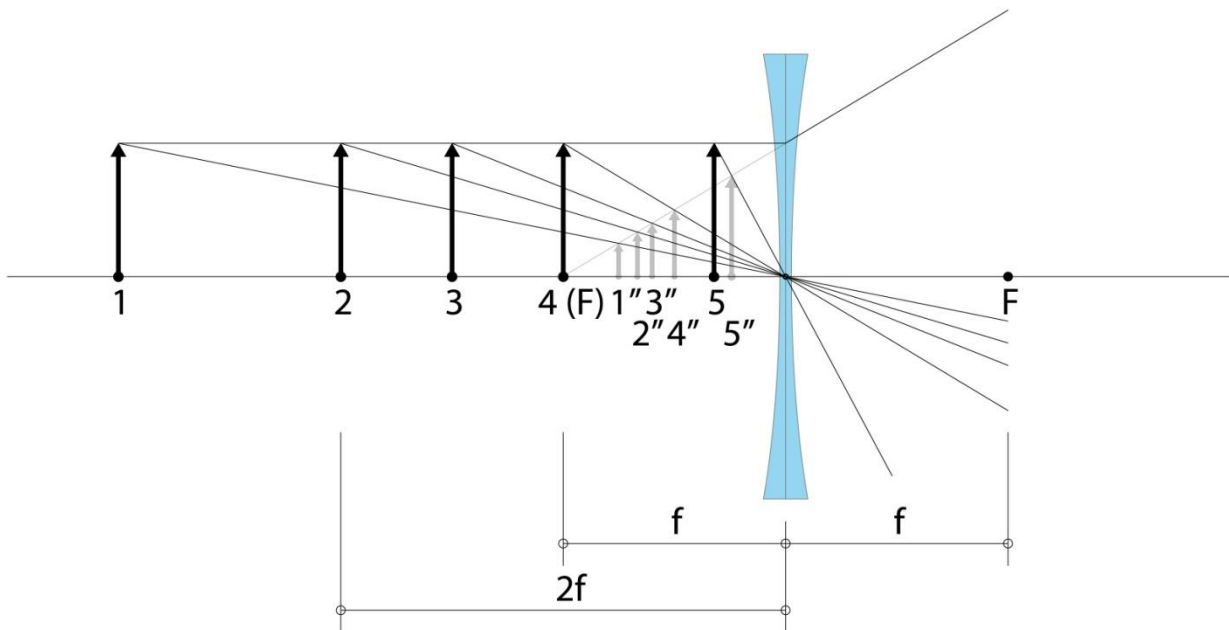
All'avvicinarsi del soggetto, l'immagine si allontana e si ingrandisce. Ma la lente convergente è in grado di fornire un'immagine reale soltanto se il soggetto è a distanza superiore a quella del fuoco.

**Lente concava
(divergente)**

La ricostruzione dell'immagine del soggetto è la seguente:



La distanza, la dimensione e la tipologia dell'immagine dipendono dalla posizione (distanza) del soggetto rispetto al centro della lente. A questo proposito, si consideri il seguente schema ottico:



In questo caso, si riscontra un'unica situazione tipica:

- 1) il soggetto è posto davanti alla lente, con l'immagine (1'', 2'', 3'') che si forma dallo stesso lato ed è virtuale, diritta e rimpicciolita.

All'avvicinarsi del soggetto, l'immagine si avvicina e si ingrandisce, ma rimanendo sempre virtuale e con dimensioni inferiori a quelle del soggetto.

Formule parassiali per lenti

Formule parassiali per lenti in aria

Le formule che seguono si riferiscono ai raggi parassiali, vicini e paralleli all'asse ottico. In questa zona, le superfici delle lenti sono pressoché perpendicolari all'asse ottico e tutti gli angoli di incidenza e rifrazione sono quindi limitati. Di conseguenza, nella legge di Snell, è possibile approssimare i piccoli seni degli angoli di incidenza e rifrazione con gli angoli stessi, espressi in radianti.

Le formule parassiali non tengono conto degli effetti dell'aberrazione sferica sui raggi marginali (i raggi che incidono lungo il bordo delle lenti) e, salvo diversa indicazione, valgono sia per lenti sia per lenti spesse.

Lunghezza focale

La relazione fondamentale è la seguente:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n - 1)^2}{n} \cdot \frac{t_c}{r_1 \cdot r_2}$$

dove: f = lunghezza focale
 n = indice di rifrazione
 t_c = spessore al centro
 r_1, r_2 = raggi di curvature delle superfici della lente

Per le lenti sottili, $t_c \approx 0$; mentre per quelle con una superficie piana, r_1 o r_2 sono infiniti. In entrambi i casi, il secondo termine a destra è nullo e l'equazione si riduce alla seguente tipica forma:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Raggi di lenti simmetriche

Poiché $r_2 = -r_1$, fissato lo spessore al centro, si ha:

$$\begin{aligned} r_1 &= (n - 1) \left[f \pm \sqrt{f^2 - \left(\frac{f \cdot t_c}{n} \right)} \right] = \\ &= (n - 1) f \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{t_c}{nf} \right)} \right] \end{aligned}$$

Nella prima uguaglianza, si usa il segno + per la radice quadrata se f è positiva e si usa il segno - se f è negativa. Nella seconda uguaglianza, si deve usare il segno + indipendentemente dal segno di f .

Raggi di lenti con una superficie piana

Poiché r_2 è infinito, si ha:

$$r_1 = (n - 1)f$$

Posizioni dei punti principali

In generale, si ha:

$$A_2H'' = \frac{-r_2 \cdot t_c}{n(r_2 - r_1) + t_c(n - 1)}$$

$$A_1H = \frac{-r_1 \cdot t_c}{n(r_2 - r_1) + t_c(n - 1)}$$

Per lenti simmetriche ($r_2 = -r_1$):

$$A_1H = -A_2H'' = \frac{r_1 \cdot t_c}{2nr_1 - t_c(n - 1)}$$

Se r_1 o r_2 sono infiniti, si applica la regola di Hôpital. Quindi, per lenti piano-convexe con orientamento corretto:

$$A_1H = 0$$

e

$$A_2H'' = -\frac{t_c}{n}$$

Per lastre piane, con $r_1 \rightarrow \infty$ in una lente simmetrica, si ottiene $A_1H = A_2H'' = t_c/2n$.

Iato

Lo iato è calcolabile dalla seguente relazione:

$$HH'' = t_c \left\{ 1 - \frac{f}{n} \left[\frac{1}{f} - \frac{(n-1)^2}{n} \cdot \frac{t_c}{r_1 \cdot r_2} \right] \right\}$$

che, usando l'approssimazione per lenti sottili (esatta nel caso di lenti con una superficie piana), diventa:

$$HH'' = t_c \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

Ingrandimento

L'ingrandimento è calcolabile dalla seguente relazione:

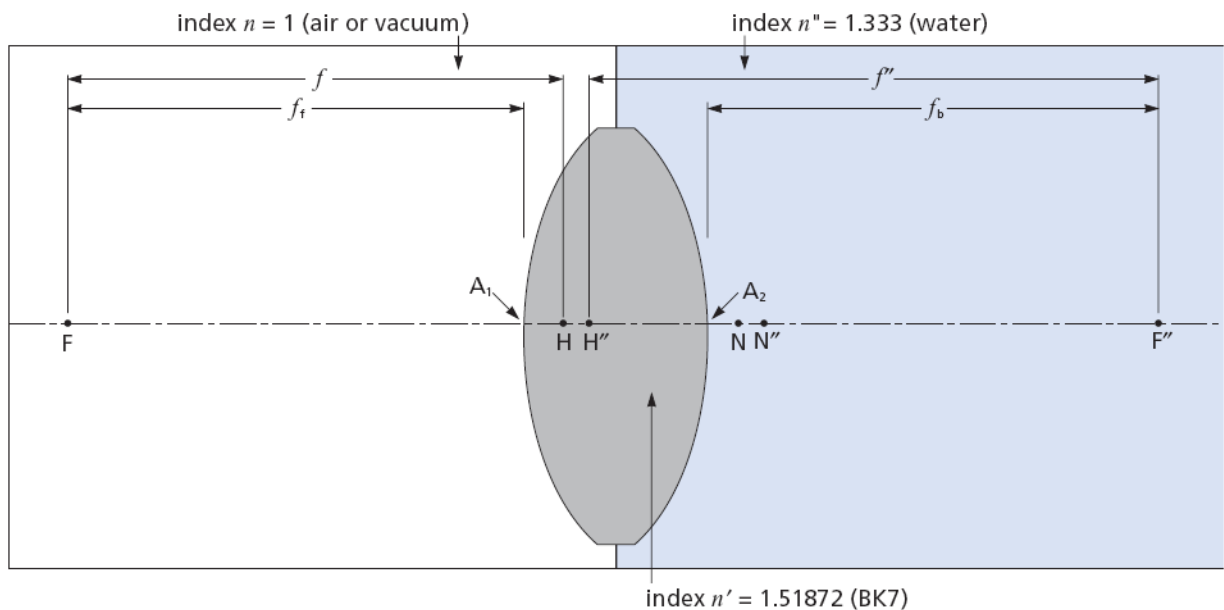
$$m = \frac{s''}{s} = \frac{f}{s-f} = \frac{s''-f}{f}$$

Formule parassiali per lenti in mezzi qualsiasi

Queste formule permettono l'impiego di indici di rifrazione distinti e completamente arbitrario per il mezzo dello spazio del soggetto (indice di rifrazione n), per quello della lente (indice di rifrazione n') e per quello dello spazio dell'immagine (indice di rifrazione n''). In questa situazione, la lunghezza focale assume due distinti valori, f nello spazio del soggetto e f'' nello spazio dell'immagine. Inoltre, è necessario distinguere i punti principali dai punti nodali. La lente funge sia da lente sia da finestra di separazione tra i mezzi dello spazio del soggetto e dello spazio dell'immagine.

La situazione di una lente immersa in un fluido omogeneo è un caso particolare ($n = n''$), ma di notevole importanza pratica. I valori di f e f''

sono ancora uguali, consentendo così di applicare le formule valide per combinazioni di lenti ai sistemi immersi in un fluido comune. Il caso più generale, relativo a due diversi fluidi, è più complesso ed occorre affrontarlo tracciando il percorso dei raggi superficie dopo superficie.



Costante della lente (k)

Questa costante appare frequentemente nelle formule che seguono. È una funzione esplicita delle caratteristiche della lente (r_1 , r_2 , t_c e n') e degli indici di rifrazione n e n'' di entrambi i mezzi. Questa dipendenza è implicita ovunque compaia k .

$$k = \frac{n' - n}{r_1} + \frac{n'' - n'}{r_2} - \frac{t_c(n' - n)(n'' - n')}{n' \cdot r_1 \cdot r_2}$$

Lunghezze focali

Sono calcolabili in base alle seguenti equazioni:

$$f = \frac{n}{k}$$

$$f'' = \frac{n''}{k}$$

La relazione diretta tra le focali è quindi la seguente:

$$\frac{n}{f} = \frac{n''}{f''} = k$$

Formule delle lenti

La formula in forma gaussiana è la seguente:

$$\frac{n}{s} + \frac{n''}{s''} = k$$

Invece, la formula in forma newtoniana è la seguente:

$$x \cdot x'' = f'' \cdot f = \frac{n \cdot n''}{k^2}$$

Posizioni dei punti principali

Sono valide le seguenti relazioni:

$$A_1H = \frac{nt_c}{k} \left(\frac{n'' - n'}{n'r_2} \right)$$

$$A_2H'' = \frac{-nt_c}{k} \left(\frac{n' - n}{n'r_1} \right)$$

Distanze coniugate

La distanza soggetto-primo punto principale è data da:

$$s = \frac{ns''}{ks'' - n''}$$

La distanza immagine-secondo punto principale è data da:

$$s'' = \frac{n''s}{ks - n}$$

Ingrandimento

L'ingrandimento è calcolabile dalla seguente relazione:

$$m = \frac{ns''}{n''s}$$

Apertura relativa ed apertura numerica

I calcoli parassiali usati per determinare il diametro necessario dell'elemento si basano sui concetti di **apertura relativa (N)** ed **apertura numerica (Numerical Aperture, NA)**. L'apertura relativa è il rapporto tra la lunghezza focale ed il diametro efficace, cioè l'**apertura libera (Clear Aperture, CA)**, della lente:

$$N = \frac{f}{CA}$$

Per visualizzare N, si consideri una lente con lunghezza focale positiva illuminata uniformemente con un fascio luminoso collimato. L'apertura

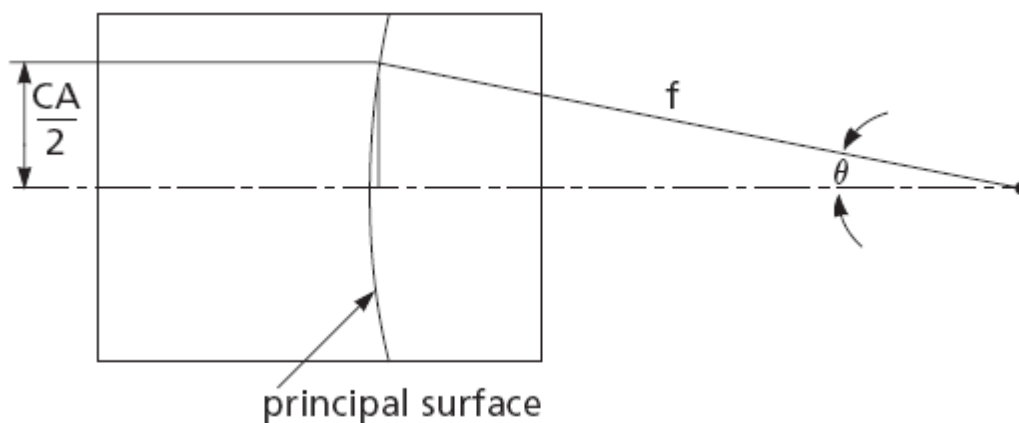
relativa definisce l'angolo del cono di luce uscente dalla lente che forma l'immagine. Questo è un concetto importante quando la capacità di raccogliere luce del sistema ottico è critica, come nei casi di focalizzazione della luce su un monocromatore o di proiezione di un'immagine ad elevato ingrandimento.

L'altro termine normalmente utilizzato per definire l'angolo del cono è l'apertura numerica, che è il seno dell'angolo formato dal raggio periferico con l'asse ottico. Dalla figura successiva, si evince che:

$$NA = \sin \theta = \frac{CA}{2f}$$

e

$$NA = \frac{1}{2 \cdot f/N}$$



L'apertura relativa è determinabile con qualsiasi raggio qualora si conoscano la sua distanza coniugata e il diametro dove interseca la superficie principale del sistema ottico.

Nel caso più generale di una lente con le sue due superfici a contatto con due diversi fluidi, l'equazione dell'apertura relativa viene sdoppiata:

$$N = f/CA$$

$$N'' = f''/CA$$

dove: CA = diametro dell'apertura libera della lente

così come quella dell'apertura numerica

$$NA = n \cdot \sin \theta$$

dove: $\theta = \arcsin\left(\frac{CA}{2s}\right)$

$$NA = n'' \cdot \sin \theta''$$

dove: $\theta'' = \arcsin\left(\frac{CA}{2s''}\right)$