



DIFFRAZIONE ED INTERFERENZA

Sommario

Ottica ondulatoria.....	2
Interferenza	2
Diffrazione.....	5
Fenditura circolare	13
Fenditura rettangolare	15
Distribuzione di energia.....	15

Ottica ondulatoria

L'ottica geometrica è solo un'approssimazione dell'ottica fisica, visto che in realtà quando si parla di luce bisogna necessariamente fare riferimento ad onde elettromagnetiche. Ciononostante, consente di interpretare correttamente numerosi fenomeni, legati alla propagazione della luce ed all'analisi del comportamento di strumenti ottici, semplicemente con l'utilizzo delle leggi della riflessione e della rifrazione.

Quando, però, si devono analizzare fenomeni di sovrapposizione di onde, il modello approssimato non è più sufficiente e bisogna, più correttamente, esaminare la propagazione della luce dal punto di vista della propagazione di onde.

È opportuno premettere che le onde elettromagnetiche si differenziano in maniera essenziale da altri tipi di onde, quali ad esempio le onde che si propagano in mezzi elastici, dal momento che possono propagarsi anche nel vuoto.

Interferenza

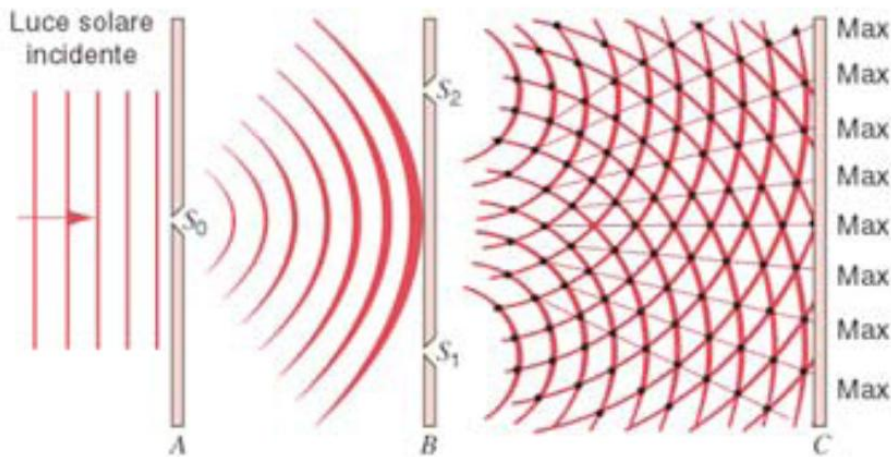
Il fenomeno dell'interferenza è dovuto alla sovrapposizione, in un punto dello spazio, di due o più onde. Si osserva che l'intensità dell'onda risultante, in un dato punto dello spazio, può essere maggiore o minore dell'intensità di ogni singola onda di partenza. L'interferenza viene detta **interferenza costruttiva** quando l'intensità risultante è maggiore di ogni singola intensità originaria ed **interferenza distruttiva** quando l'intensità risultante è inferiore.

Il termine viene usualmente utilizzato per parlare di interferenza tra due onde coerenti, di norma provenienti dalla stessa sorgente, o aventi la stessa frequenza.

Il primo esperimento di interferenza riguardante la luce fu eseguito nel 1801 da Thomas Young. L'esperienza di Young fornì la prima prova inconfutabile della natura ondulatoria della luce.

Young utilizzò la luce solare che incideva su un primo schermo dove era praticato un forellino S_0 . Oltre questo schermo, la luce subisce la diffrazione e si propaga come onda pressoché sferica, se le dimensioni del foro sono piccole, raggiungendo con uno stesso fronte d'onda due fori S_1 e S_2 , equidistanti da S_0 , posti su un secondo schermo. Ciascuno di questi nuovi

fori origina a sua volta un raggio diffranto, per cui su un terzo schermo si avrà la sovrapposizione dell'effetto delle due onde.



La prima fenditura serve per rendere le onde in S_1 e S_2 in fase tra loro.

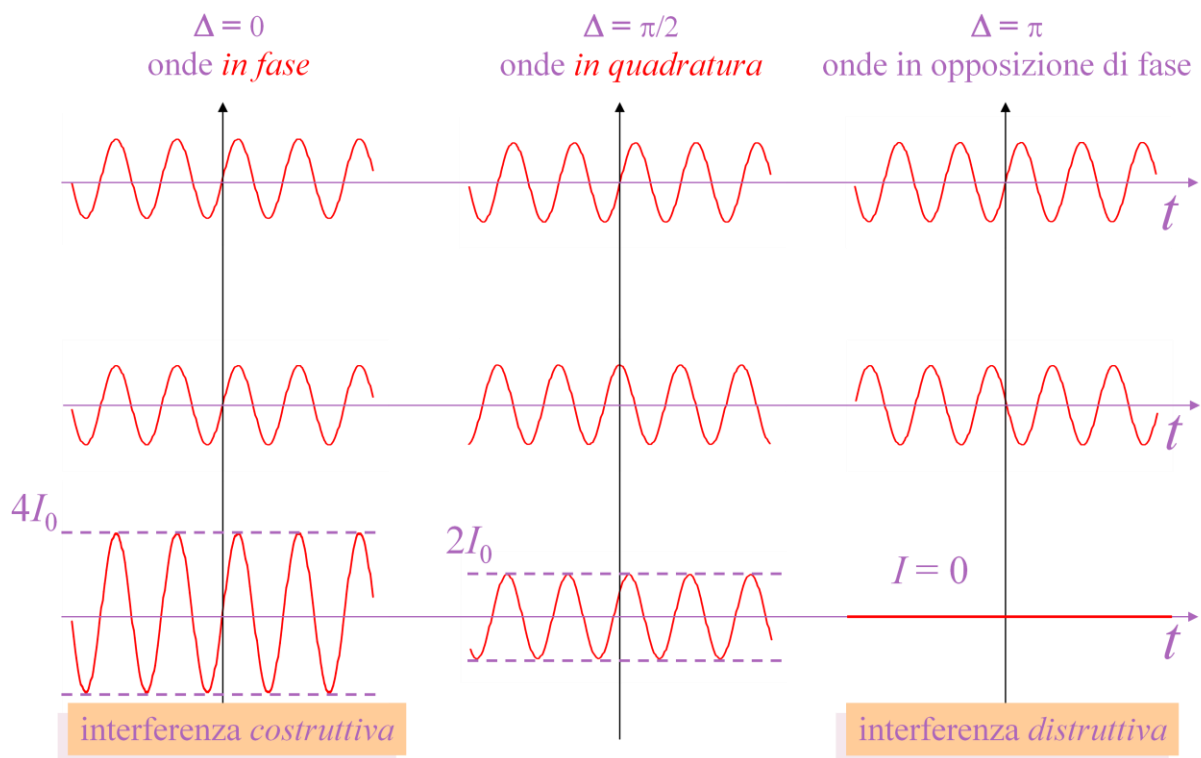


Frange di interferenza

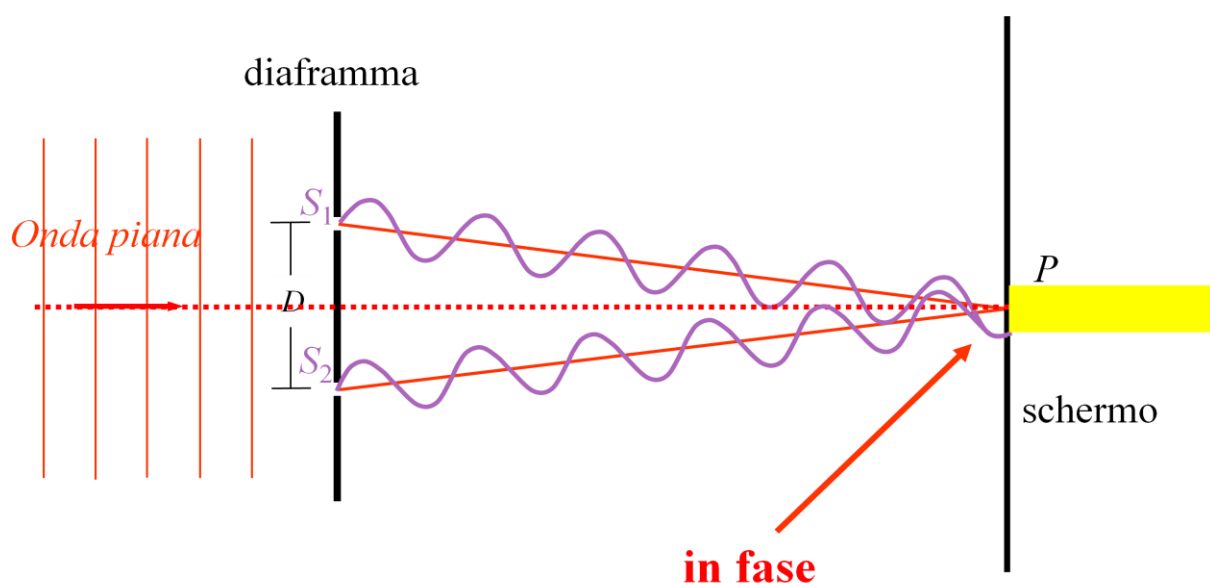
Sul terzo schermo la sovrapposizione provocherà una serie di frange illuminate alternate ad altre scure, perché in alcuni punti le onde vi giungeranno in fase, dando origine ad interferenza costruttiva, in altri punti giungeranno in opposizione di fase, dando origine ad interferenza distruttiva avendo percorso distanze e cammini ottici diversi.

Interferenza costruttiva e distruttiva

Si consideri l'interferenza tra due sole onde aventi la stessa lunghezza d'onda e la stessa intensità. In figura è mostrata la dipendenza dal tempo di due onde identiche che giungono nello stesso punto dello spazio.

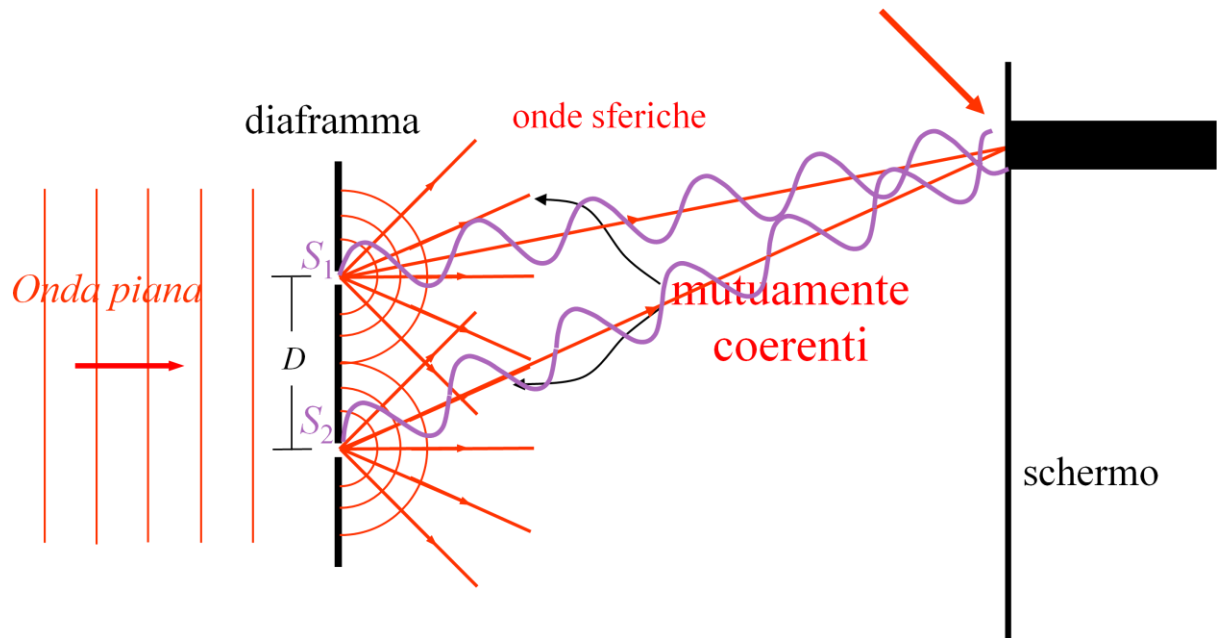


Nel primo caso le onde sono in **concordanza di fase**. L'effetto risultante è che le due onde si sovrappongono esattamente e l'onda risultante ha ampiezza doppia rispetto ad esse. Si parla quindi di **interferenza totalmente costruttiva** se due onde identiche giungono in un punto con differenza di fase nulla.



Nel secondo caso le onde sono, l'una rispetto all'altra, in **ritardo di un quarto di fase**. L'interferenza genera un'onda risultante con frequenza ed ampiezza uguali a quelle delle onde interferenti, ma con fase intermedia.

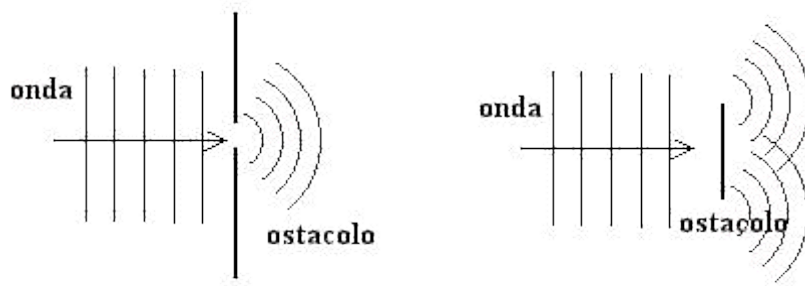
Nel terzo caso le onde sono in **opposizione di fase**. Le creste di un'onda si sovrappongono agli avvallamenti dell'altra, quindi le due onde si elidono a vicenda e la risultante è nulla. Si ha quindi **interferenza totalmente distruttiva** quando le due onde giungono in un punto con differenza di fase pari a 180° .



Quando due sorgenti emettono onde nello spazio, vi sono quindi regioni in cui l'interferenza è costruttiva (**massimi di interferenza**) e altre in cui l'interferenza è distruttiva (**minimi di interferenza**).

Diffrazione

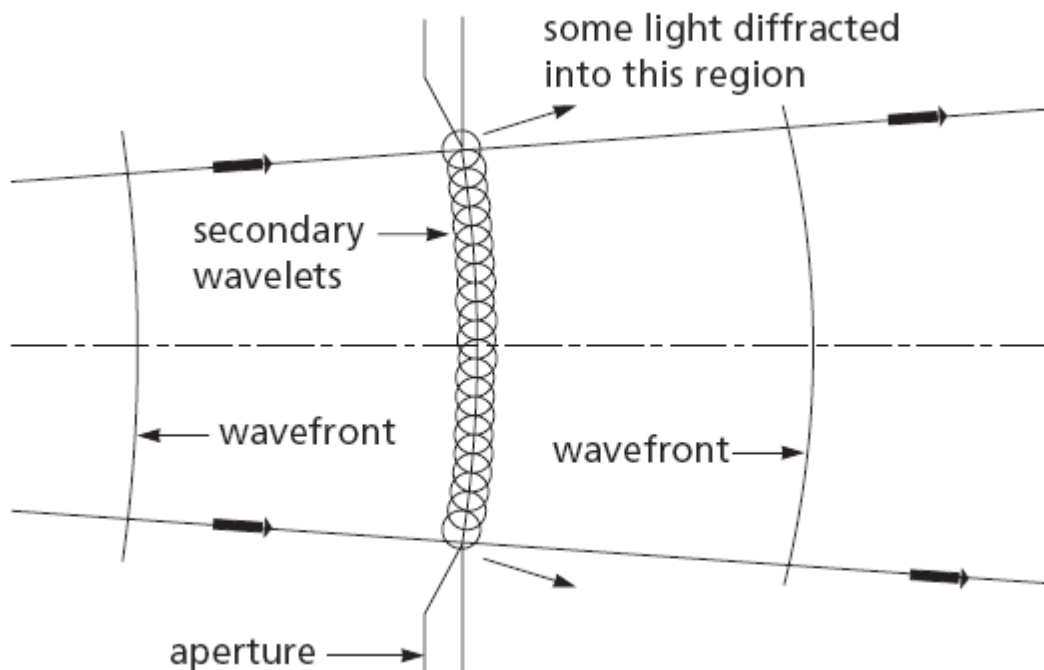
L'esperienza di ogni giorno porta ad osservare che quando un'onda incontra un'apertura o l'estremità di un ostacolo, una parte delle onde prosegue in regioni dello spazio non direttamente esposte alle onde incidenti, dato che queste dovrebbero viaggiare in linea retta.





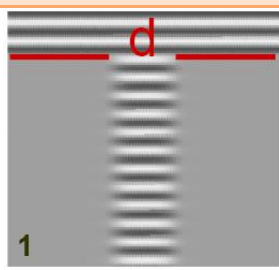
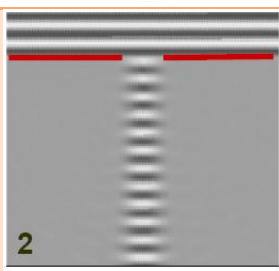
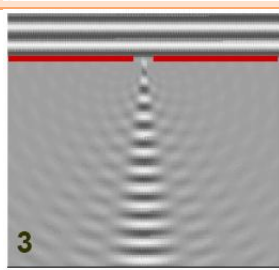
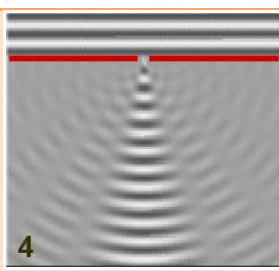
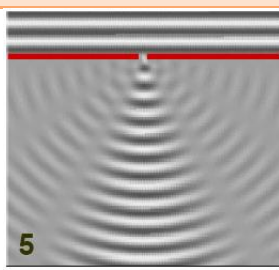
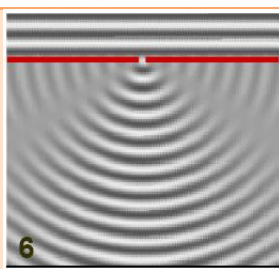
Questo effetto, noto come **diffrazione**, è un fenomeno fisico fondamentale ed inevitabile. Per comprendere la diffrazione, è necessario prendere in considerazione la natura ondulatoria della luce.

Secondo Huygens, ciascun punto di un fronte d'onda è una sorgente secondaria di onde sferiche con la stessa frequenza di quella primaria.

L'onda che si propaga è quindi l'involuppo delle onde sferiche che si espandono. L'interferenza tra le onde sferiche secondarie genera uno schema di frange che diminuiscono rapidamente di intensità all'aumentare dell'angolo con la direzione di propagazione iniziale. Il principio di Huygens descrive in modo preciso la diffrazione, ma la spiegazione rigorosa richiede uno studio dettagliato della teoria ondulatoria.



La tabella seguente permette di valutare cosa succede quando un'onda piana attraversa una fenditura:

Diffrazione di onde attraverso una fenditura	
Relazione tra d e λ	Effetto diffrattivo
<div style="text-align: center;"> $d \gg \lambda$  $d \approx \lambda$  $d < \lambda$ </div>	
	
	
	
	
	

La condizione necessaria per il manifestarsi di questo fenomeno ottico è:

$$d \leq \lambda$$

dove: d = dimensione ostacolo.

Gli effetti della diffrazione sono tradizionalmente suddivisi nelle categorie di Fresnel e Fraunhofer.

La **diffrazione di Fresnel** tratta essenzialmente di che cosa accade alla luce nell'immediato dintorno di un oggetto o di un'apertura che diffrangono. Riveste quindi interesse solo nel **campo vicino**, cioè quando la sorgente luminosa è vicina all'oggetto o all'apertura in questione. Di conseguenza, assume grande importanza in applicazioni, quali l'ottica digitale, le fibre ottiche e la microscopia a campo vicino.

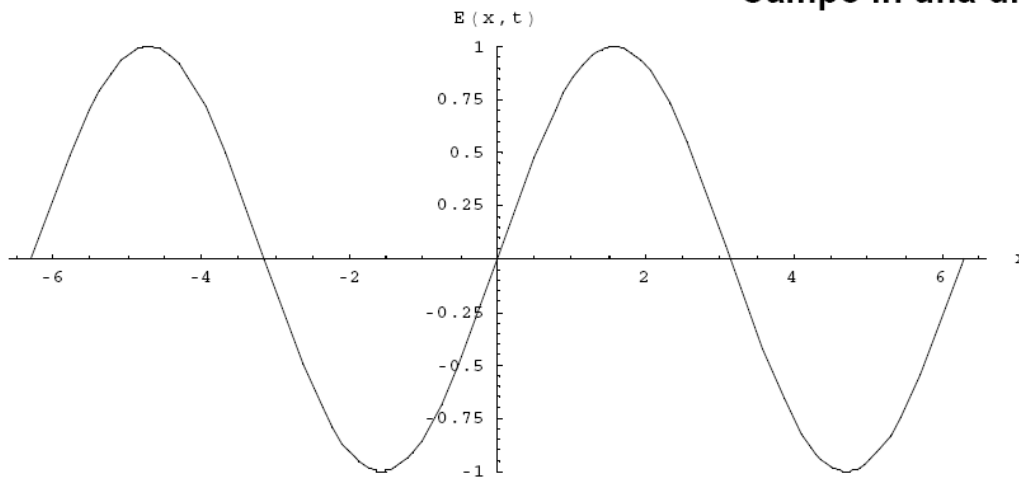
La **diffrazione di Fraunhofer** tratta degli effetti a distanza infinita (**campo lontano**) della diffusione luminosa operata da un oggetto o da un'apertura illuminati da una sorgente all'infinito (**illuminazione con onde piane**). È di grande importanza anche in sistemi ottici semplici.

Queste definizioni eccessivamente semplificate potrebbero portare a ritenere che la diffrazione di Fraunhofer è rilevante solo in sistemi ottici messi a fuoco sull'infinito, mentre la diffrazione di Fresnel diventa fondamentale a distanze di messa a fuoco ravvicinate. Ma non è così!. Una lente o un sistema di lenti con lunghezza focale finita positiva che intercettano onde piane tracciano sul piano focale lo schema di diffrazione della loro apertura in campo lontano. Pertanto, è la diffrazione di Fraunhofer che determina il limite delle prestazioni dei sistemi ottici. Più in generale, per qualsiasi rapporto delle distanze coniugate, gli angoli del campo lontano sono trasformati in scostamenti sul piano dell'immagine.

Cammino ottico

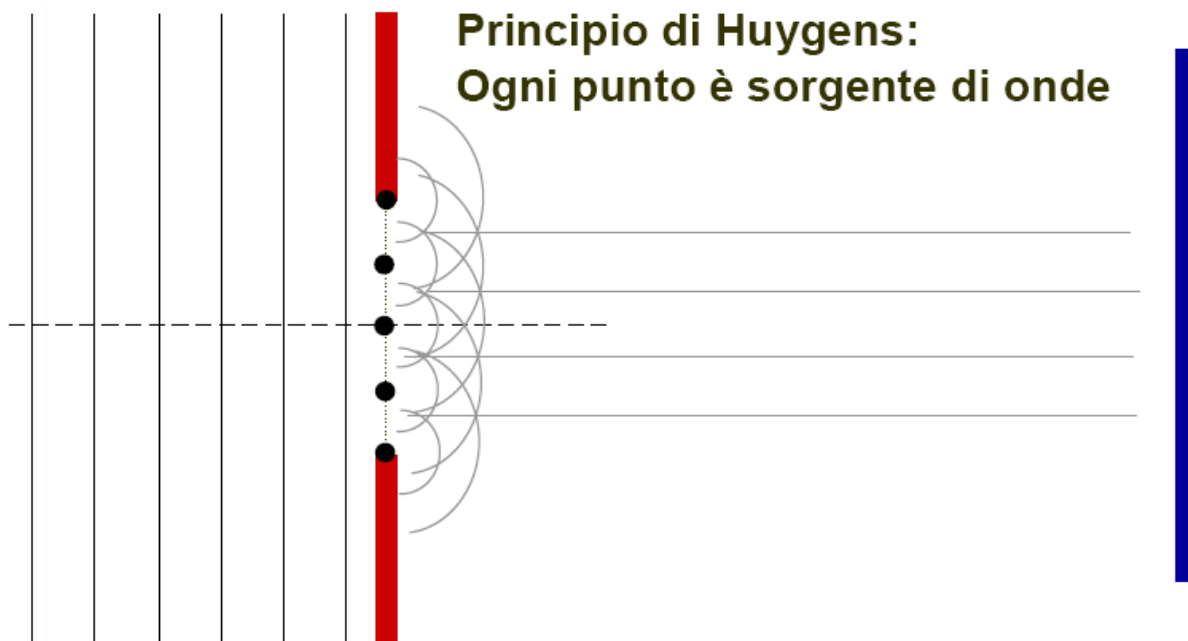
Il campo elettromagnetico nello spazio libero può essere rappresentato da un'onda di tipo sinusoidale che si propaga perpendicolarmente all'oscillazione con velocità c .

Campo in una dimensione



Per il calcolo dell'intensità della luce che attraversa una fenditura, è necessario porre le seguenti premesse:

- la luce che arriva sulla fenditura proviene da lontano (onda piana),
- lo schermo sul quale viene visualizzata l'intensità si trova lontano dalla fenditura (raggi paralleli),
- la lunghezza d'onda è dello stesso ordine di grandezza della larghezza della fenditura ($\lambda \sim d$).

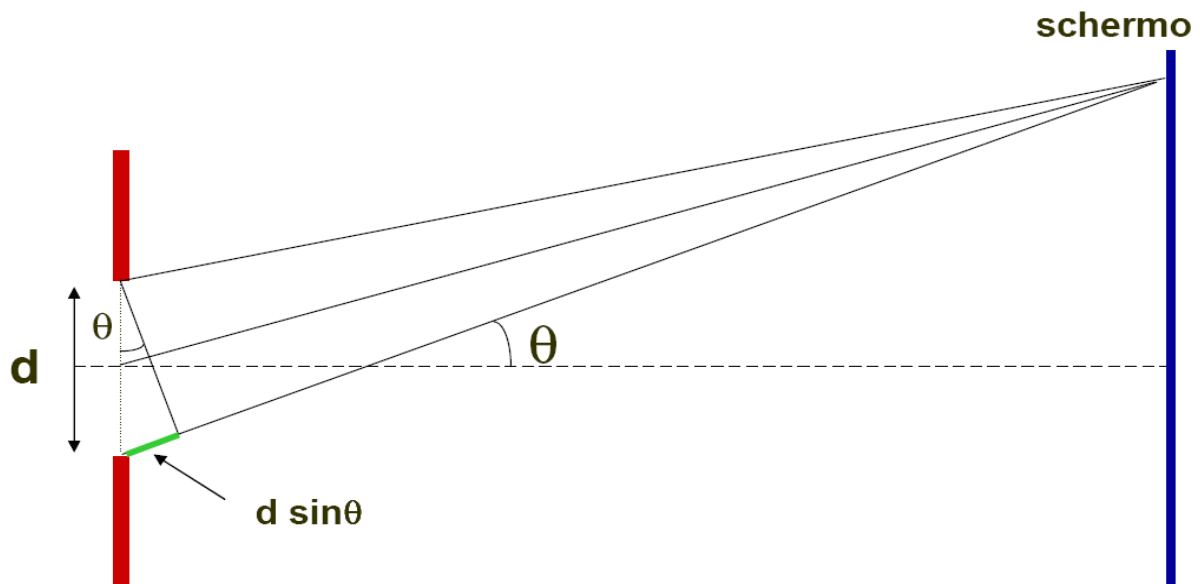


Per quanto riguarda la differenza di cammino ottico, è possibile procedere alle seguenti semplificazioni:

- a grandi distanze si trascurano le differenze dovute al diverso angolo di incidenza sullo schermo,
- si considerano solo le differenze nel cammino iniziale.

La differenza tra le lunghezze dei percorsi dei raggi che provengono dai due lati della fenditura è data da:

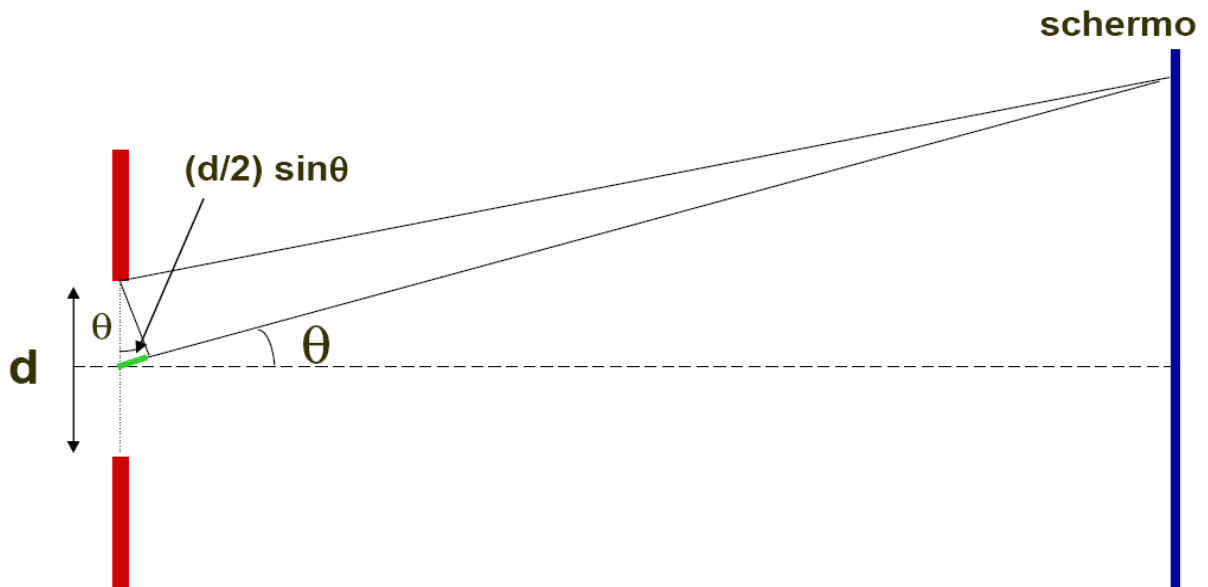
$$\Delta L = d \sin\theta$$



Per il principio di Huygens, si dovranno considerare tutti i punti interni alla fenditura come origini di onde.

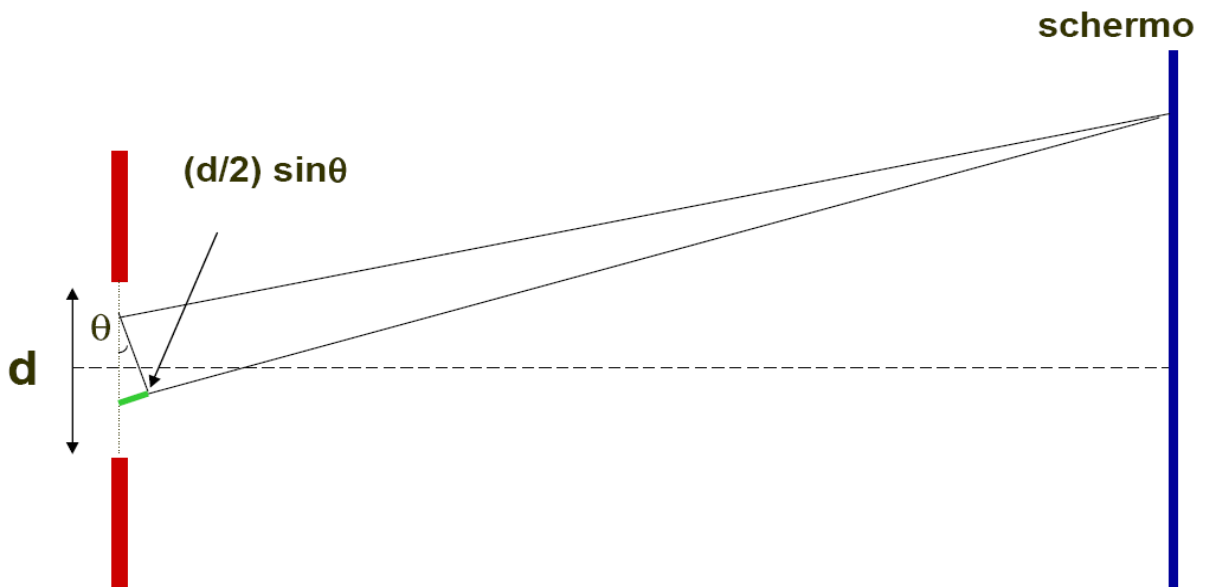
La differenza di cammino ottico dei raggi che provengono dal centro e da un lato della fenditura è data da:

$$\Delta L = (d/2) \sin\theta$$



La differenza di cammino ottico dei raggi che provengono da due punti interni alla fenditura distanti $d/2$ è sempre data da:

$$\Delta L = (d/2) \sin\theta$$



Per ottenere l'intensità luminosa in ciascun punto dello schermo, si dovranno sommare tutti i raggi spostandosi lungo la fenditura.

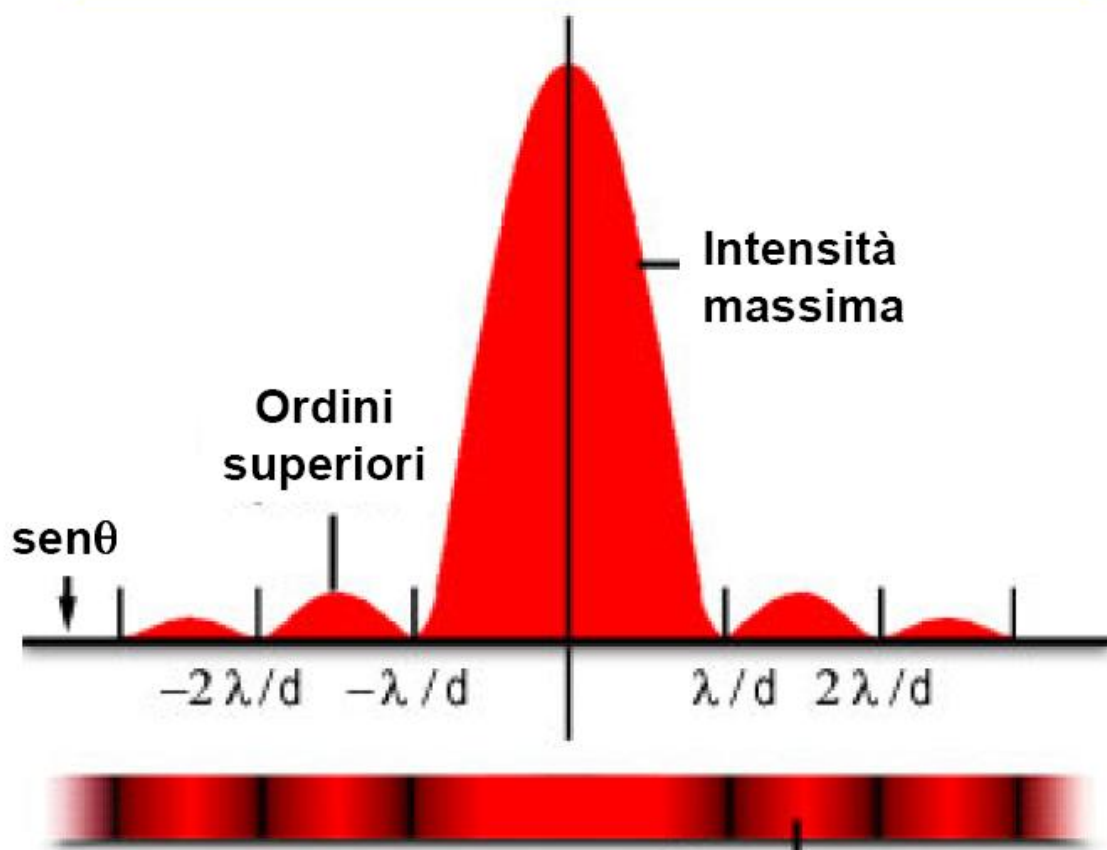
L'intensità luminosa sarà al minimo dove la differenza di cammino è pari a mezza lunghezza d'onda, in quanto le due onde saranno in opposizione di fase:

$$\Delta L = (d/2) \sin\theta = \lambda/2$$

Mentre raggiungerà un massimo dove la differenza di cammino è pari alla lunghezza d'onda, in quanto le due onde saranno in concordanza di fase:

$$\Delta L = (d/2) \sin\theta = \lambda$$

Il grafico che segue descrive la distribuzione dell'intensità luminosa sullo schermo:



Si noti che il picco dei massimi decresce all'aumentare della distanza dal centro dello schermo, individuato dall'intersezione del suo piano con l'asse della fenditura.

Le posizioni dei minimi e dei massimi dell'intensità luminosa sono ricavabili dalle relazioni che seguono, dove il parametro k ($= 0, 1, 2, 3, 4, \dots$) identifica ordini crescenti a partire dal centro dello schermo.

- **Interferenza distruttiva:**

$$m \lambda = \frac{d \sin \theta}{k}$$

- **Interferenza costruttiva:**

$$m \lambda = d \sin \theta$$

Fenditura circolare

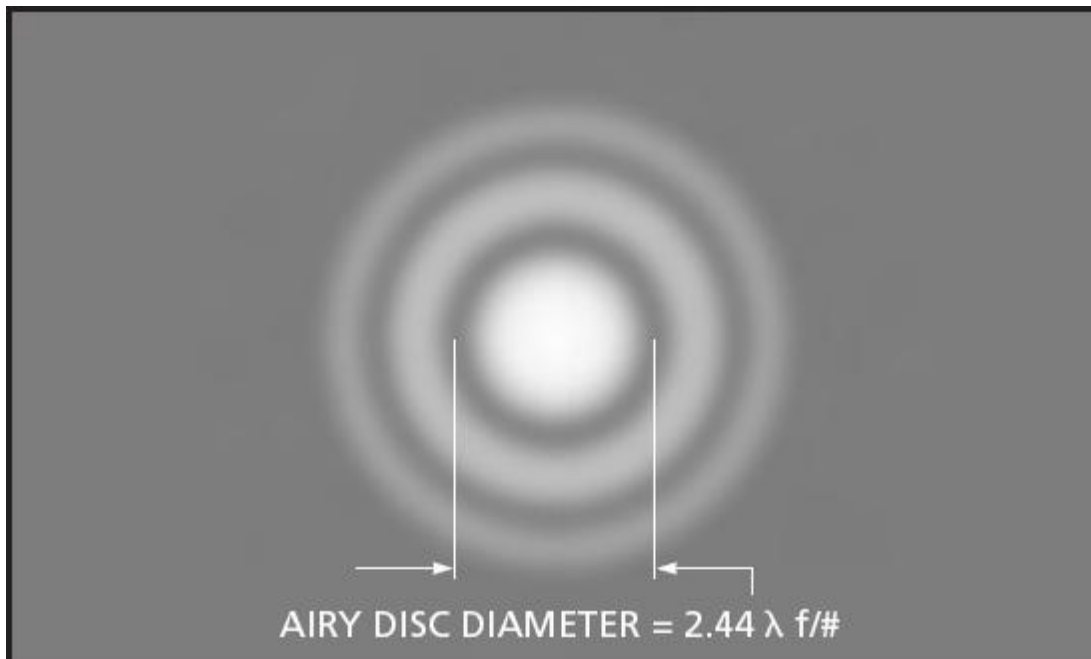
La diffrazione di Fraunhofer per una fenditura circolare fissa i limiti fondamentali delle prestazioni di lenti ed obiettivi circolari. È importante ricordare che la dimensione del punto focalizzato da una lente circolare, tenuto conto della diffrazione, è:

$$\phi = 2,44\lambda \cdot N$$

dove: ϕ = diametro del punto focalizzato con illuminazione ad onde piane,
 λ = lunghezza d'onda del fascio focalizzato,
 N = apertura relativa (valore di diaframma).

Si noti che la dimensione del punto focalizzato dipende dall'apertura relativa N della lente e non dal suo diametro assoluto.

In effetti, lo schema di diffrazione generato da una fenditura circolare illuminata uniformemente è costituito da una zona centrale luminosa, denominata **disco di Airy**, circondata da anelli molto meno brillanti.



Gli anelli debolmente luminosi sono separati da anelli oscuri. La distribuzione della radiazione luminosa nello schema è descritta da questa equazione:

$$I_x = I_o \left[\frac{2J_1(x)}{x} \right]^2$$

dove: I_o = picco di radiazione nell'immagine,
 $J_1(x)$ = funzione di Bessel del primo tipo =
 $= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(n-1)!n!2^{2n-1}}$

con:

$$x = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta$$

dove: λ = lunghezza d'onda,
 D = diametro della fenditura,
 θ = angolo rispetto all'asse dello schema.

Questa utile formula permette di calcolare la distribuzione della radiazione luminosa in campo lontano per una fenditura circolare di diametro D illuminata uniformemente.

Fenditura rettangolare

Una fenditura rettangolare, matematicamente più semplice, è utile relativamente agli elementi ottici cilindrici. La distribuzione della radiazione luminosa nello schema di diffrazione di una fessura rettangolare illuminata uniformemente è descritta da questa equazione:

$$I_x = I_o \left[\frac{\sin x}{x} \right]^2$$

dove: I_o = picco di radiazione nell'immagine,

con:

$$x = \frac{\pi d \cdot \sin \theta}{\lambda}$$

dove: λ = lunghezza d'onda,
 d = larghezza della fenditura,
 θ = angolo rispetto all'asse dello schema.

Distribuzione di energia

La tabella che segue riporta posizione, intensità relativa e percentuale dell'energia totale in ciascun anello o banda degli schemi della diffrazione di Fraunhofer pura (non affetta da aberrazioni) per fenditure circolari e rettangolari.

Energy Distribution in the Diffraction Pattern of a Circular or Slit Aperture

Ring or Band	Circular Aperture			Slit Aperture		
	Position (x)	Relative Intensity (I_x/I_0)	Energy in Ring (%)	Position (x)	Relative Intensity (I_x/I_0)	Energy in Band (%)
Central Maximum	0.0	1.0	83.8	0.0	1.0	90.3
First Dark	1.22π	0.0		1.00π	0.0	
First Bright	1.64π	0.0175	7.2	1.43π	0.0472	4.7
Second Dark	2.23π	0.0		2.00π	0.0	
Second Bright	2.68π	0.0042	2.8	2.46π	0.0165	1.7
Third Dark	3.24π	0.0		3.00π	0.0	
Third Bright	3.70π	0.0016	1.5	3.47π	0.0083	0.8
Fourth Dark	4.24π	0.0		4.00π	0.0	
Fourth Bright	4.71π	0.0008	1.0	4.48π	0.0050	0.5
Fifth Dark	5.24π	0.0		5.00π	0.0	

Note: Position variable (x) is defined in the text.

È preferibile caratterizzare le posizioni in entrambi gli schemi con la medesima variabile x . Nel caso della fenditura circolare, questa variabile è così correlata all'angolo di campo:

$$\sin \theta = \frac{\lambda x}{\pi D}$$

dove: D = diametro della fenditura.

Per la fenditura rettangolare, la relazione è la seguente:

$$\sin \theta = \frac{\lambda x}{\pi d}$$

dove: d = larghezza della fenditura,
 D, w, λ = stessa unità di misura (preferibilmente millimetri).

Le posizioni di campo lineari invece che angolari si trovano semplicemente da:

$$r = s'' \cdot \tan \theta$$

dove: s'' = seconda distanza coniugata.

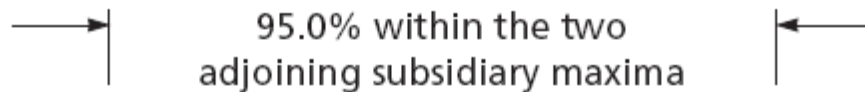
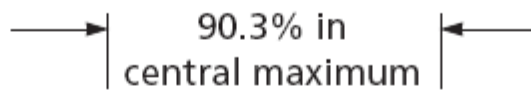
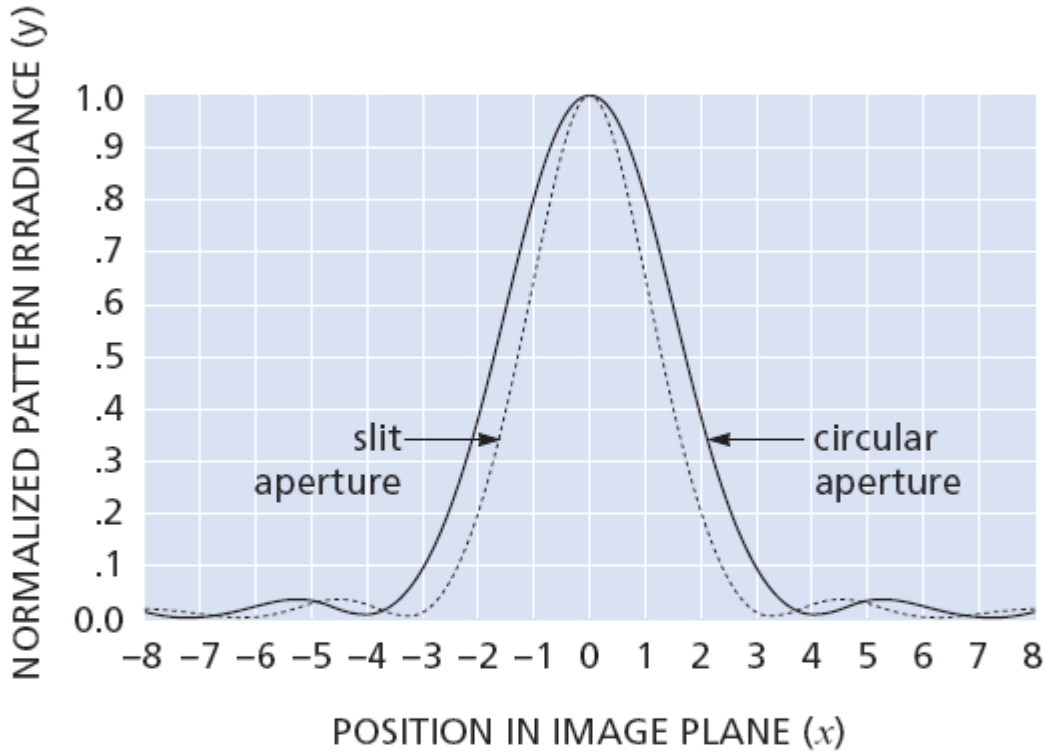
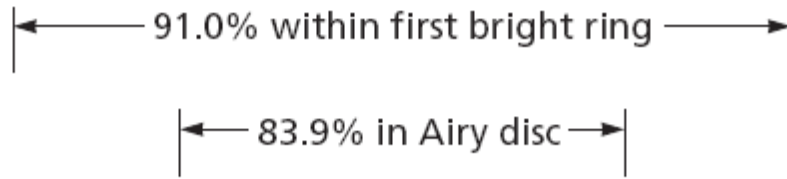
Questo ultimo risultato è sovente riportato in altra forma, ovvero l'**equazione della dimensione di punto limitata dalla diffrazione**; per lenti circolari si ha la relazione già vista in precedenza:

$$\phi = 2,44\lambda \cdot N$$

Questo valore rappresenta la più piccola dimensione di punto che un sistema ottico è in grado di dare per una data apertura circolare ed è il diametro del primo anello oscuro, dove l'intensità luminosa si azzerava.

Il grafico che segue evidenzia l'andamento degli schemi di diffrazione di entrambi i tipi di fessura con la stessa scala normalizzata e con il diametro della fessura circolare uguale alla larghezza della fessura rettangolare.

CIRCULAR APERTURE



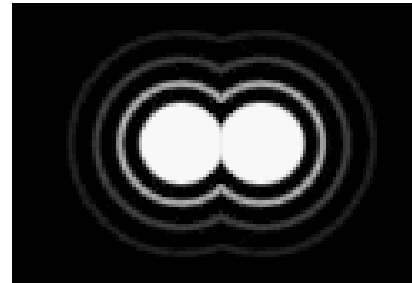
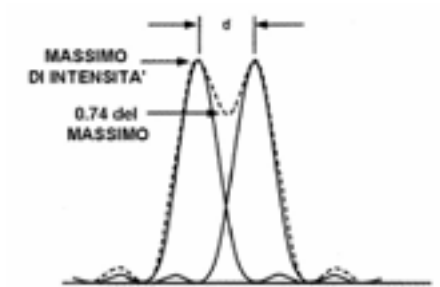
SLIT APERTURE

Criterio di Rayleigh

Nelle immagini, la risoluzione spaziale è limitata fondamentalmente dalla diffrazione. La determinazione della massima risoluzione spaziale possibile

per un sistema ottico richiede una definizione arbitraria della risoluzione di due particolari.

Secondo Rayleigh, due distinte sorgenti puntiformi sono risolte quando il centro del disco di Airy di una si sovrappone al primo anello oscuro dello schema di diffrazione dell'altra.



In base al criterio di Rayleigh, la minima distanza risolvibile è data da:

$$d = \frac{0,61\lambda}{NA} = 1,22\lambda \cdot N$$

dove: λ = lunghezza d'onda,
 NA = apertura numerica,
 N = apertura relativa.

